Resumo das aulas ministradas, no curso de Iniciação à "Teoria de Conjuntos", promovido pelo Círculo de Estudos de Matemática do Laboratório de Matemática, em novembro de 1 961, no Instituto de Educação e no Curso de Pedogogia da Faculdade de Filosofia da Pontifícia Universidade Católica do R.G.S, em 1 962, pelo Prof. Dr. Antônio Ribeiro, sôbre "Teoria de Conjuntos".

## 1 - TEORIA DE CONJUNTOS

### a) - Noções Fundamentais

Se imaginarmos o edifício matemático sob a forma de um prisma triangular, então diremos, figurativamente, que os lados de sua base inferior são respectivamente, a Teoria de Conjuntos, a Teoria de Funções e a Teoria de Grupos. (Figura 1)

Assim, verificamos que serão apresentadas, para serem por nós estudadas, as teorias fundamentais da Matemática Moderna,

Começaremos pela Teoria dos Conjuntos, cujo criador foi o matemático Jorge Cantor. Êste nasceu em 1 845, na Rússia, e teve a sua formação matemática realizada na Alemanha.

A bibliografia que sugerimos, relativamente à parte histórica, é a seguinte:

"Breve história de la Matemática" - Francisco Vera. Editorial Losada S.A. Buenos Ayres.

"História de las Matemáticas" - Eric Temple Bell. Editada por Fondo de Cultura Económica - México.

"Los Grandes Matemáticos" - Eric Temple Bell. Editorial Losada S.A. - Buenos Ayres.

Quanto à parte científica, apresentamos os seguintes trabalhos:

"A Álgebra Moderna " - M. Queysanne e A. Delachet. Coleção Saber Atual, volume 36 - S. Paulo.

"Teoria dos Conjuntos e Espaços Métricos" - E. H. Spanier, publicada pela Sociedade Paranaense de Matemática.

"Conjuntos e Funções" - Leopoldo Nachbin, Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Rio de Janeiro.

"Théorie des Ensembles" - N. Bourbaki. França.
"Introduction to the Theory of Sets" - Joseph Brower. Editôra Prentice-Hall. Nova Jersey. USA.

Feita a introdução e indicada a bibliografia, vamos prosseguir, apresentando as noções fundamentais

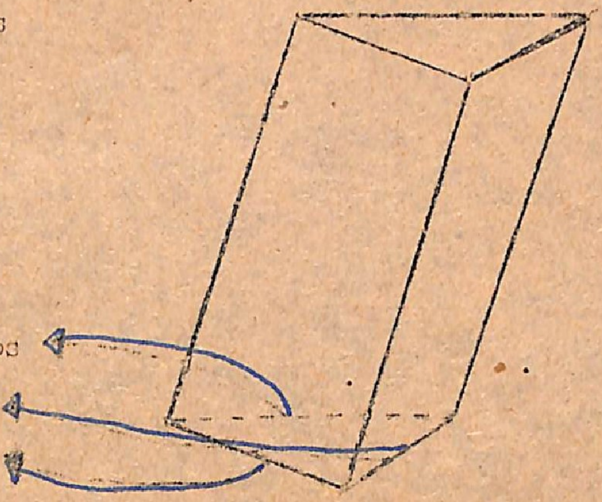


Figura 1
Teoria de Conjuntos
Teoria de Funções
Teoria de Grupos

CONCEITOS PRIMITIVOS de uma ciência são todos aquêles que não podem ser definidos à base de outros conceitos da mesma ciência.

Em ~~Mática~~ Matemática, conceitos primitivos são aquêles que não podem ser definidos à base de outros conceitos matemáticos. Exemplos: ponto, reta, plano, conjunto, etc. Contra-exemplos: ângulo, diferença entre dois números etc. a) "Ângulo é a figura constituída por duas semi-retas de origem comum". Não é conceito primitivo, porque apela para o conceito de reta e de ponto.

Sabemos que "diferença entre dois números a e b, propostos numa certa ordem, é um terceiro número, que, somado ao segundo, dá por resultado o primeiro". - Também não é conceito primitivo, pois apela para o conceito de soma.

Conjunto é um conceito primitivo - segundo Leopoldo Nachbin, matemático brasileiro da atualidade, - "uma das noções primitivas da Matemática é a de conjunto. Com isso queremos dizer que nos limitamos a atribuir ao têrmo conjunto o seu sentido usual de coleção de objetos ou elementos; e não pretendemos defini-lo a partir de outros conceitos matemáticos. Por conveniência, faremos uso também do têrmo "coleção", como sinônimo de conjunto a fim de evitar a repetição deselegante dêste último, no mesmo enunciado". São sinônimos de conjunto, por fôrça de tradição entre os matemáticos, as expressões: coleção, agrupamento, agregado e classe.

Bento de Jesus Caraça (Portugal) em sua obra "Conceitos Fundamentais da Matemática", pg. 12, item 12 diz: "Num certo momento, olhamos para uma sala, por exemplo, uma sala de espetáculos, onde está um agrupamento de pessoas. É claro que essas pessoa são, uma a uma, entidades determinadas e gozam em comum da propriedade de, no momento de que falamos, estarem nessa sala; qualquer pessoa que nesse momento passe na rua, não não goza dessa propriedade.

Portanto, se falarmos no conjunto de pessoas que estão dentro da sala, referimo-nos a qualquer coisa bem determinada, tal que, dada uma pessoa qualquer, poderemos averiguar com rigor, se ela pertence ou não ao conjunto de que se falou". Êsse autor caracteriza o conjunto por um critério de pertinência. Determina com rigor, se uma pessoa está ou não na sala, isto é, se pretence ou não ao conjunto.

Para BORBAKI, citado na "Álgebra Moderna" de M. Queysanne e A. DE LACHET, - "Um conjunto é formado de elementos susceptívei s de possuirem certas propriedades e terem entre si, ou com elementos de outros conjuntos, certas relações".

Sente-se na citação acima a ênfase dada à relação entre os elementos de um conjunto com os de outro conjunto. Isso permite compreender o sentido moderno de contagem que examinaremos na Teoria de Funções.

Voltando a citar Nachbin: - "A Teoria Geral dos Conjuntos não cogita da natureza dos elementos que constituem cada um dos conjuntos, e sim, das relações possíveis entre êsses elementos e conjuntos".

São, pois, objetivos da Teoria de Conjuntos investigar:

a) - As relações possíveis entre os elementos de um conjunto.

b) - As relações entre conjuntos.

São êsses os dois objetivos máximos de um estudante desta teoria e não o conhecimento da natureza dos elementos do conjunto

## CARACTERIZAÇÃO DE UM CONJUNTO

Há dois critérios para a caracterização de um conjunto:

a) - Pela apresentação individual ou nominativa dos seus elementos.

Exemplo: Apresentação nominal dos elementos de uma família.

b) - Por um critério de pertinência. Através de uma proposição por meio da qual sabemos se um elemento pertence ou não ao conjunto dado. Exemplo: O conjunto dos números primos. (Todos aquêles que admitem por divisores sòmente a unidade ou êles mesmos).

## RELAÇÃO DE PERTINÊNCIA

Matematizando o que já foi apresentado, podemos propor, agora, os primeiros simbolismos. Seja C um conjunto qualquer e a um elemento de C


A relação $\boxed{a \in C}$ que pode ser lida como: a é elemento de C, ou a pertence a C. Esta relação é chamada "relação de pertinência".

Se b não pertence a C, isto é, b não é elemento de C, o simbolismo utilizado será $\boxed{b \notin C}$ Êsse simbolismo foi creado por Peano, matemático italiano contemporâneo, falecido em 1 932.

EXEMPLIFICAÇÃO

Serão apresentados exemplos dos aspectos seguintes, destinados a fornecer o material para posterior realização de operações:

- Teoria de Números
- Teria de Polinômios
- Geometria Elementar
- Álgebra das Classes de Congruência.

## TEORIA DE NÚMEROS

Os diferentes conjuntos numéricos

O problema da contagem gerou, sob o ponto de vista histórico, o conjunto de números naturais. É por meio dêstes números que se responde à pergunta: "Quantos são?"

O conjunto de números naturais é apresentado pelo seguinte simbolismo: $N = (1, 2, 3, 4, \ldots\ldots\ldots, n, \ldots\ldots\ldots)$

Necessidade operacional de ampliação dêsse campo

A análise das ampliações feitas no conjunto de números naturais mostra que elas são determinadas pelas operações com êsses números. Essas operações são sete:

| 3 diretas | 4 inversas |
|---|---|
| adição | → subtração |
| multiplicação | → divisão |
| potenciação | → radiciação |
| | → logaritmação |

A potenciação tem duas operações inversas conforme se observa a seguir.

Sejam os números 2, 5 e 32. Verifica-se serem três operações distintas entre dois quaisquer deles para se ter o terceiro. Assim, dados 2 e 5, deve-se realizar uma potenciação entre êles para gerar o 32.

De outra forma, conhecidos 32 e 5, a operação entre êles para se obter 2, a radiciação. Finalmente, a operação entre 32 e 2, para se conseguir o expoentr 5, é a logaritmação.

Simbòlicamente: $2^5 = 32$, no primeiro caso.

$\sqrt[5]{32} = 2$, no segundo caso.

$\log_2 32 = 5$, no último caso

A análise de operação por operação demonstra que, enquanto as diretas são pacíficas, as inversas sã mais exigentes.

A ADIÇÃO não oferece problemas pois, dados dois números naturais, sempre se consegue determinar um terceiro, chamado soma.

Na SUBTRAÇÃO, há uma problemática. Exemplificando:

1) - 15 - 12 = 3, possível no campo dos números naturais, porque existe o número 3, com a propriedade de, somado a 12, reproduz 15.

2) - 15 - 15 = ? Impossível no campo dos números naturais. Surge, então, o primeiro número artificial, o zero, que vem solucionar essa impossibilidade no campo dos naturais, e escreve-se: $15 - 15 = 0$

Lembre-se que as propriedades definitórias do zero são:

$a + 0 = a \qquad a \times 0 = 0 \qquad a^0 = 1$

A criação do zero amplia o campo dos números naturais e surge o segundo campo, ou conjunto dos inteiros absolutos: naturais e zero.

$I_a = ( 0, 1, 2, \ldots\ldots, n, \ldots\ldots )$

Subtração é uma operação perturbadora: $7 - 12 = ?$ Impossível nos dois campos já existentes. Faz-se necessário criar um terceiro campo de números: conjunto dos números relativos, compreendendo positivos e negativos.

$I_r = ( 0 \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\ldots \pm n, \ldots\ldots )$

Nesses três campos a subtração se realiza plenamente.

A Multiplicação, como a Adição, não oferece dificuldades. Pode-se multiplicar quaisquer pares de números naturais, pares de números inteiros absolutos e pares de números inteiros relativos.

A Divisão só é possível no conjunto de números inteiros absolutos, quando o dividendo fôr múltiplo do divisor. Porém, a sua generalização é responsável pela criação do quarto campo de números, ou conjunto de números fracionários: absolutos e relativos.

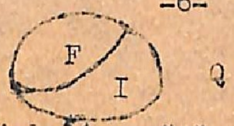
$F = \left( \frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \ldots\ldots \frac{p}{q}, \ldots\ldots \right)$

ESTUDO DAS "RELAÇÕES ENTRE" os conjuntos de números inteiros e de números fracionários: Tanto os números inteiros como os fracionários admitem a forma de razão. Surge, então, um quinto conjunto, o conjunto dos números racionais, abrangendo o conjunto dos inteiros e o dos fracionários, isto é, números que podem ser postos sob a forma de razão entre dois números inteiros quaisquer, dados em certa ordem e sendo o segundo diferente de zero. Exemplificando: 5 é racional, porque pode ser posto sob a forma de razão: $5 = \frac{5}{1} = \frac{10}{2} = \frac{15}{3}$, etc.

3,5 também é racional:

$3{,}5 = \frac{35}{10} = \frac{350}{100}$; etc.

Anota-se por "Q" o conjunto dos números racionais, o qual é um conjunto de dois conjuntos, F e I, ambos conjuntos com infinitos elementos



Justifica-se o simbolismo "Q", pois em Matemática "Razão" é sinônimo de quociente.

Voltando a operações:

Potenciação com expoente inteiro e positivo é sempre possível.
Exemplo: $3^{85}$ é possível.

Radiciação - exige a criação de um nôvo campo numérico: o dos irracionais Exemplo: $\sqrt{5}$ $\sqrt{6}$ $\sqrt{7}$

O estudo dêstes problemas exige a criação do campo numérico dos números irracionais. Denota-se por NQ (não aceitam a forma de razão) êste campo.

$\sqrt{-4}$ , e outros similares, justificam o aparecimento do campo dos números complexos, porque não há, no conjunto dos campos anteriores, número que multiplicado por si mesmo dê $-4$.

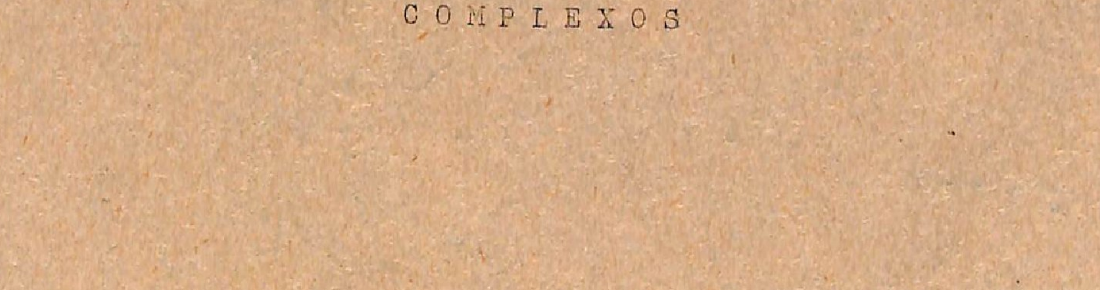
O campo de números complexos, conforme tese demonstrada pelo matemático alemão KUMMER, é a máxima acepção numérica. Logo, a logaritmação será plenamente realizável dentro do mesmo.

O conjunto dos racionais e o dos não racionais forma o conjunto dos reais, que são casos particulares dos números complexos.

Esquema geral dos números complexos

- Pròpriamente ditos
  - Binários - pares ordenados de números reais
  - Ternários - ternos ordenado de números reais
  - Quaternários - conjuntos de 4 números reais dados numa certa ordem.
- Reais
  - Racionais
    - Inteiros
      - Absolutos
        - Naturais
        - Zero
      - Relativos
        - Positivos
        - Negativos
    - Fracionários
      - Absolutos
      - Relativos
        - Positivos
        - Negativos
  - Irracionais
    - Algébricos $\sqrt{3}$ $\sqrt{2}$ $\sqrt{5}$
      - Absolutos
      - Relativos
        - Positivos
        - Negativos
    - Transcendentes $+\pi$ $-\pi = 3,1416$
      - Absolutos
      - Relativos
        - Positivos
        - Negativos

## VISUALIZAÇÃO GEOMÉTRICA DOS CAMPOS DE NÚMEROS




C O M P L E X O S

Conhecemos, pois, os diferentes conjuntos numéricos que anotaremos por, N, I, F, Q, NQ, R e C, os quais são denominados, respectivamente, por: conjunto dos números Naturais, ( N )

" " " Inteiros, ( I ) ( $I_a$ $I_r$ )

" " " Fracionários, ( F )

" " " Racionais, ( Q )

" " " Irracionais, ( NQ )

" " " Reais, ( R )

" " " Complexos ( C )

Se apelarmos para a relação de pertinência, então poderemos escrever: $5 \in N$, $-3 \in I$, $-\frac{2}{7} \in F$, $\sqrt{2} \in NQ$ e $3 + 5 \in C$.

2)- A Teoria dos polinômios apresenta-nos inúmeros exemplos de conjuntos. O primeiro é o conjunto de todos os polinômios racionais e inteiros da forma $ax + b$ ou $a_0x + a_1$ onde x é uma variável e os demais elementos a,b ou $a_0$, $a_1$, são coeficientes. O segundo é o conjunto de todos os polinômios da forma $ax^2 + bx + c$ ou $a_0x^2 + a_1x + a_2$ nos quais x é uma variável e a,b,c ou $a_0$, $a_1$, $a_2$ são coeficientes. O terceiro é o conjunto de todos os polinômios da forma $ax^3 + bx^2 + cx + d$ ou $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ com as mesmas significações para os símbolos

---

---

---

O enésimo é o conjunto dos polinômios da forma

$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ E assim por diante.

Consideremos, finalmente, o conjunto dêstes conjuntos de polinômios. Julgamos interessantr salientar que êste último conjunto tem para elementos n conjuntos.

A GEOMETRIA ELEMENTAR também nos oferece exemplos de conjuntos. A reta, concebida como conjunto de pontos, é um primeiro exemplo.


figura 2

$A \in r$

$D \in r$

O plano, como conjunto de pontos, é um segundo exemplo. É fácil verificarmos que êste último pode também ser encarado como uma coleção, cujos elementos são, igualmente, conjuntos, isto é, conjunto de retas.

4) - A ÁLGEBRA DAS CLASSES DE CONGRUÊNCIA proporciona mais exemplos Por definição, Classes de Congruência módulo "n" (n Natural) são conjun-

tos cujos elementos são números inteiros, que, divididos por "n" deixam o mesmo resto. A módulo n existem "n" classes que anotaremos por: $C_0$ $C_1$ $C_2$ .........$C_{n-1}$ Com módulo 2, temos: $C_0 = (0,2,4,6,\ldots 2_a,\ldots)$ e a classe: → $C_1 = (1,3,5,7,\ldots 2_{a+1},\ldots)$ Com módulo 3, temos:

$C_0 = (0,3,6,9, \ldots 3_a, \ldots)$
$C_1 = (1,4,7,10, \ldots 3_{a+1}, \ldots)$
$C_2 = (2,5,8,11, \ldots 3_{a+2}, \ldots)$

É interessante mostrarmos as operações entre duas classes do mesmo módulo, chamadas de adição e multiplicação, as quais são geradoras das classes soma e produto que a seguir definiremos. Ao conjunto destas operações e de suas propriedades, damos o nome de Álgebra das classes de Congruência.

Sejam $C_a$ e $C_b$ duas classes de congruência a módulo n, e $\alpha$ um elemento de $C_a$ e $\beta$ um elemento de $C_b$.

A classe que contiver $\beta$ é a classe soma e a que contiver $\alpha \times \beta$ é a classe produto. (Definição importante)

Em simbólos: $\alpha + \beta \in C_a = C_a + C_b$
$\alpha \times \beta \in C_p = C_a \times C_b$

Como já são conhecidas as classes de congruências vamos formar tabuadas de somar e de multiplicar. O dispositivo utilizado é o seguinte:

MÓDULO 2

| + | $C_0$ | $C_1$ |
|---|---|---|
| $C_0$ | $C_0$ | $C_1$ |
| $C_1$ | $C_1$ | $C_0$ |

Tabuada de somar

| x | $C_0$ | $C_1$ |
|---|---|---|
| $C_0$ | $C_0$ | $C_0$ |
| $C_1$ | $C_0$ | $C_1$ |

Tabuada de multiplicar

$C_0$ (0,5,10, ..... n
$C_1$ (1,6,11, ......2n+1)
$C_2$ (2,7,12, ......2n+2)
$C_3$ (3,8,13, ......2n+3)
$C_4$ (4,9,14, ......2n+4)

MÓDULO 5 - Tabuada de somar

| + | $C_0$ | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $C_0$ | $C_0$ | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ |
| $C_1$ | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ | $C_0$ |
| $C_2$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ | $C$ | $C_1$ |
| $C_3$ | $C_3$ | $C_4$ | $C_0$ | $C_1$ | $C_2$ |
| $C_4$ | $C_4$ | $C_0$ | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ |

Tabuada de multiplicar

| x | $C_0$ | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $C_0$ | $C_0$ | $C_0$ | $C_0$ | $C_0$ | $C_0$ |
| $C_1$ | $C_0$ | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ |
| $C_2$ | $C_0$ | $C_{2_2}$ | $C_4$ | $C_1$ | $C_3$ |
| $C_3$ | $C_0$ | $C_3$ | $C_1$ | $C_4$ | $C_2$ |
| $C_4$ | $C_0$ | $C_4$ | $C_3$ | $C_2$ | $C_1$ |

Já conhecemos a formação das tabuadas de adicionar e multiplicar classes de congruência, de módulo 2 e de módulo 5.

Antes de formar outras tabuadas vamos conceituar elemento neutro em um conjunto dado e relativamente a uma operação conhecida.

Sejam $C = (a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_p, \ldots)$ um conjunto, e "$\theta$" uma operação binária entre os seus elementos. Se existir em C um elemento $a_n$ tal que $a_n \theta a_p = a_p$, então $a_n$ é chamado de elemento neutro. Se $\theta$ fôr a adição em qualquer sentido, então o elemento neutro recebe a denomição de zero ou elemento nulo. Por outro lado, se fôr uma multiplicação, então $a_n$ é chamado de elemento unidade.

Na Teoria de Números os elementos neutros para adição e multiplicação clássicas são, respectivamente, o zero e o um.

Nas tabuadas que já realizamos com as classes de congruência, a módulo 2, o zero e a classe $C_o$ e o elemento unidade é $C_1$.

Observamos que $C_o + C_a = C_a$ e $C_o \times C_a = C_o$, isto é, as propriedades difinitórias do zero nos campos numéricos estão se conservando.

Formemos, agora, as classes de congruência módulo 3 e as respectivas tabuadas.

As classes são: $C_o = (0,3,6,9, \ldots\ldots, m3, \ldots\ldots)$

$C_1 = (1,4,7,10, \ldots\ldots, m3+1, \ldots\ldots)$

$C_2 = (2,5,8,11, \ldots\ldots, m3+2, \ldots\ldots)$

e as tabuadas correspondentes:

| + | $C_o$ | $C_1$ | $C_2$ |
|---|---|---|---|
| $C_o$ | $C_o$ | $C_1$ | $C_2$ |
| $C_1$ | $C_1$ | $C_2$ | $C_o$ |
| $C_2$ | $C_2$ | $C_o$ | $C_1$ |

| x | $C_o$ | $C_1$ | $C_2$ |
|---|---|---|---|
| $C_o$ | $C_o$ | $C_o$ | $C_o$ |
| $C_1$ | $C_o$ | $C_1$ | $C_2$ |
| $C_2$ | $C_o$ | $C_2$ | $C_1$ |

O zero e o elemento unidade são, respectivamente, $C_o$ e $C_1$

Com módulo 6 - as classes de congruência são:

$C_o = (0,6,12, 18, \ldots\ldots\ldots, m6, \ldots\ldots)$

$C_1 = (1,7,13, 14, \ldots\ldots\ldots, m6+1, \ldots\ldots)$

$C_2 = (2,8,14,20, \ldots\ldots\ldots, m6+2, \ldots\ldots)$

$C_3 = (3,9,15,21, \ldots\ldots\ldots, m6+3, \ldots\ldots)$

$C_4 = (4,10,16,22, \ldots\ldots\ldots, m6+4, \ldots\ldots)$

$C_5 = (5,11,17,23, \ldots\ldots\ldots, m6+5, \ldots\ldots)$

As tabuadas são apresentadas como se segue:

| + | $C_0$ | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ | $C_5$ | $C'_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_0$ | $C_0$ | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ | $C_5$ | |
| $C_1$ | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ | $C_5$ | $C_0$ | |
| $C_2$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ | $C_5$ | $C_0$ | $C$ | |
| $C_3$ | $C_3$ | $C_4$ | $C_5$ | $C_0$ | $C_1$ | $C_2$ | |
| $C_4$ | $C_4$ | $C_5$ | $C_0$ | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | |
| $C_5$ | $C_5$ | $C_0$ | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ | |

| x | $C_0$ | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ | $C_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_0$ | $C_0$ | $C_0$ | $C_0$ | $C_0$ | $C_0$ | $C_0$ |
| $C_1$ | $C_0$ | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ | $C_5$ |
| $C_2$ | $C_0$ | $C_2$ | $C_4$ | $C_0$ | $C_2$ | $C_4$ |
| $C_3$ | $C_0$ | $C_3$ | $C_0$ | $C_3$ | $C$ | $C_3$ |
| $C_4$ | $C$ | $C_4$ | $C_2$ | $C_0$ | $C_4$ | $C_2$ |
| $C_5$ | $C_0$ | $C_5$ | $C_4$ | $C_3$ | $C_2$ | $C_1$ |

A classe neutra, dita <u>zero</u> ou <u>elemento nulo</u>, é $C_0$ e a classe unidade é $C_1$.

Observando a última tabuada de multiplicar salientamos um fato deveras notável, isto é; $C_3 \times C_2 = C_0$

<u>O produto é nulo, embora os dois fatôres sejam diferentes de zero</u>

Acreditamos que através de exemplos de diferentes disciplinas matemáticas o leitor já esteja familiarizado com o conceito primitivo e fundamental da Teoria.

Na Álgebra das Classes de Congruência, aprendemos a operar aditiva e multiplicativamente com as classes que são notòriamente conjuntos.

Prosseguiremos na apresentação da Teoria de Conjuntos|

<u>CONJUNTO VAZIO</u> - é um conjunto caracterizado por um critério de pertinência, tal que nenhum elemento o satisfaça. É anotado por $\emptyset$. Exemplo: 1) O conjunto das capitais brasileiras, cuja letra inicial de seu nome é X. Exemplo: 2) O conjunto C de elementos x que pertençam a I e que satisfaçam a equação $2x - 1 = 0$. Com efeito, a equação $2x - 1$ admite só e somente uma solução fracionária ($2x = 1$ ; $x = \frac{1}{2}$) e como x I, então, C é vazio. Usamos na Teoria dos Conjuntos o seguinte simbolismo para ôste exemplo: $C = (x; x \in I ; 2x - 1 = 0)$ para leitura dêste simbolismo utilizamos a seguinte linguagem: Conjunto C, de elementos x, pertencentes ao conjunto I e satisfazendo a equação $2x - 1 = 0$. O papel do conjunto vazio na Teoria dos Conjuntos é semelhante ao do número <u>zero</u> na Teoria de Números.

<u>SUBCONJUNTOS</u> - Dizemos que um conjunto <u>x</u> é uma parte do conjunto <u>Y</u> ou ainda: que <u>x</u> está contido em <u>Y</u> ; ou ainda: que <u>x</u> é subconjunto de <u>Y</u>, se todos os elementos de <u>x</u> pertencerem também a <u>Y</u> (figura 3)

Usamos o simbolismo: $X \subset Y$, chamado <u>RELAÇÃO DE INCLUSÃO</u>, cuja leitura é realizada como segue: "X está contido em Y". A relação $A \not\subset B$ (A não contido em B) indica que nem todos elementos de A estão em B.

Consideraremos imediatas as duas propriedades da inclusão que apresentamos a seguir: 1 - se $X \subset Y$ e $Y \subset Z$, então $X \subset Z$ ; (figura 4)

2 - se $X \subset Y$ e $Y \subset X$, então $X = Y$, isto é, os conjuntos X e Y têm em comum todos os seus elementos. Dois conjuntos, nes

tas condições, são ditos iguais.

Os conjuntos numéricos N, I, F, Q, NQ, R e C permitem escrever as seguintes relações: 1ª - $N \subset I$  $Q \subset R$  $R \subset C$

2ª - Se $N \subset I$ e $I \subset Q$ então, $N \subset Q$

3ª - $N \subset I \subset Q \subset R \subset C$

Observamos que $\phi$ (vazio) está contido em qualquer conjunto e escrevemos a relação de inclusão $\phi \subset C$.

Fig.3


Fig. 4


$N \subset I \subset Q \subset R \subset$ Complexos

1 - TEORIA DE CONJUNTOS:

b) - ÁLGEBRA DE CONJUNTOS

As operações entre conjuntos, chamados de intersecção, reunião e complementação e as respectivas propriedades, constituem a Álgebra dos Conjuntos. Estas operações possuem analogias formais com o Cálculo das Proposições, um dos três principais capítulos da Lógica Matemática e estudados pelo matemático inglês do século XIX, Jorge Boole. Aos interessados sugerimos a leitura do cap. II de "Introducción a la Epistemologia Y Fundamentación de la Matemática", por Fausto Toranjos - Editôra Espasa-Calpe - Argentina, S.A.

Acreditamos existir na Álgebra dos Conjuntos, imperfeições de vocabulário. As palavras: intersecção e reunião - denominam conjuntos e não operações. Lembramos que na Teoria dos Polinômios, os vocábulos: adição e multiplicação, denominam operações que geram respectivamente, os polinômops soma e produto.

Intersecção de Conjuntos

Sejam A e B dois subconjuntos de um conjunto S, isto é, $A \subset S$ e $B \subset S$. Chamamos de elemento comum aos conjuntos A e B a um elemento x que pertença a ambos.

Na Geometria Elementar, temos um exemplo: duas retas concorrentes e pensadas como conjunto de pontos, têm o ponto P como elemento comum. Figura 5.


Definimos intersecção dos conjuntos A e B, antes citados, pelo conjunto de seus elementos comuns e empregamos o simbolismo $A \cap B$ para indicá-la.

Uma visualização geométrica podemos apresentar através do diagrama de Venn; fig 6

Intersecção de conjuntos tem certa analogia com o conceito de produto e usam a notação AB . $A \cap B = AB$

Queremos dar ênfase à notação usada por E. H. Spanier, professor da Universidade de Chicago, em seu livro "Teoria dos Conjuntos e Espaço Métricos", já citado na bibliografia.

$A \cap B = (x \in S \mid x \in A$ e $x \in B)$ Esta é a notação. Para leitura da mesma empregamos o seguinte vocabulário: A intersecção B é o conjunto de elementos x pertencentes a S e com a propriedade de também pertencerem aos conjuntos A e B.

Se não houver elementos em A  B, então diremos que A  B é vazio e aos conjuntos A e B damos o nome de disjuntos. Exemplos: Se $\alpha$ e $\beta$ forem dois planos paralelos, então $\alpha \cap \beta = \phi$. Também é vazio $Q \cap NQ$

Semelhantemente, é vazia a intersecção dos conjuntos dos inteiros pares $I_p$ com o dos inteiros ímpares $I_i$ ou simbòlicamente $I_p \cap I_i = \phi$. Observemos que a intersecção de dois conjuntod pode ser um dêles. É o caso de $Q \cap I = I$ , fig 7.


fig 7

Queremos salientar que quase sempres a intersecção de duas superfícies é uma curva. Pôr fôrça da figura 8, $\sigma_1 \cap \sigma_2 = c$

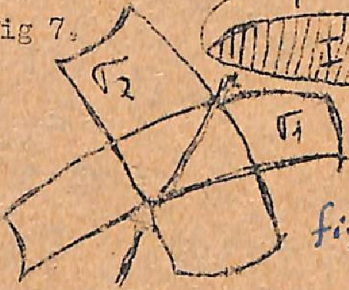



fig 8

Realizaremos a seguir, um exercício, isto é, procuraremos a intercção de A com B, sendo êstes conjuntos assim caracterizados:

$A = (a \in R \mid 0 \leq a < 2)$ e $B = (b \in R \mid 1 \leq b \leq 3)$ Ora, se os elementos de A estão no subconjunto de extremos 0 e 2, e os de B no subconjunto aberto de extremos 1 e 3, então os elementos de A  B estão na classe de extremos 1 e 2, feita a exclusão dêstes. Logo,

$$A \cap B = (x \in R \mid 1 \leq x \leq 2).$$

Estenderemos o conceito de intersecção para um número qualquer, porém finito de conjuntos. Se $A_1$, $A_2$ e $A_3$ forem três subconjuntos de um conjunto S, então nós dizemos que $A_1 . A_2 \ A_3$ é o conjunto de todos os elementos comuns aos três. O diagrama de Venn visualiza êste conceito na figura 9.

Se tivermos n subconjuntos de S, então nós escreveremos $A_1 \cap A_2 \cap \ldots\ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ O símbolo $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ é lido da seguinte maneira: Intersecção dos conjuntos $A_i$ quando i varia de 1 até n.

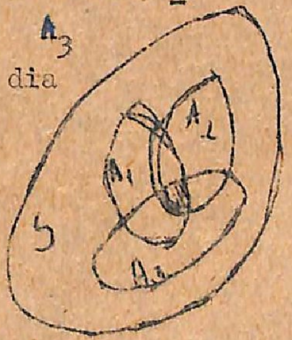



fig. 9

PROPRIEDADES DA INTERSECÇÃO

É notòriamente comutativa, isto é, $A \cap B = B \cap A$ pois $A \cap B$ e $B \cap A$

indicam, respectivamente, o conjunto dos elementos comuns A e B e a B e A e como tal afirmamos $A \cap B = B \cap A$

Dizemos, também, que a intersecção goza da propriedade <u>associativa</u>, isto é, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ onde A, B e C são três subconjuntos de um conjunto dado. Por meio da definição de intersecção verificamos a veracidade desta relação. Deixamos para o leitor a iniciativa de verificar a associatividade da intersecção para os conjuntos numéricos Q, R, C.

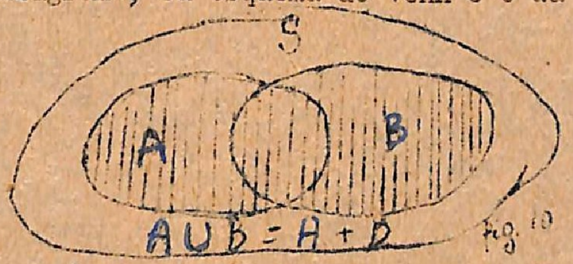
## REUNIÃO DE CONJUNTOS

No livro "Álgebra Moderna", volume 36, da coleção "Saber Atual", pág. 50, encontramos a seguinte definição: "<u>Reunião</u> de dois conjuntos A e B, onde A e B estão contidos em um conjunto S, <u>é o conjunto constituído pelos elementos comuns e não comuns a A e B</u>".

Afirmamos a existência de certa analogia dêste conceito com o de soma de números e por fôrça dêste fato encontramos autores que denominam a reunião de conjuntos por <u>soma</u>. Também é usual a denominação <u>união</u>

O simbolismo tradicional é $A \cup B$ e, às vezes, $A + B$.

Para exemplificar vamos considerar os subconjuntos I e F de R. É imediato que $I \cup F = I + F = Q$. O diagrama, ou esquema de Venn é o da figura 10.




Também queremos registrar as seguintes formas para definir reunião, as quais, em nosso entender, equivalem à definição inicial;

- Leopoldo Nachbin, ilustre matemático brasileiro, diz: "Reunião de dois conjuntos A e B, representado por $A \cup B$, é a coleção dos elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos A e B".

- O prof. Elon Lages de Lima, em seu livro "Topologia dos Espaços Métricos", afirma: "Reunião de A e B, partes de um mesmo conjunto M, é o conjunto, anotado por $A \cup B$, formado pelos elementos de A mais os de B"

- Na pág. 7 do livro "Teoria dos Conjuntode Espacos Métricos", de E. H. Spanier, encontramos a definição simbólica da reunião de conjuntos assim como segue: Se A e B forem partes de S, então definimos a reunião de A e B por $A \cup B = (x \in S \mid x \in A \text{ ou } x \in B)$ êste simbolismo difere apenas pela conjunção alternativa <u>ou</u> daquele já conhecido, isto é,

$$A \cap B = (x \in S \mid x \in A \text{ e } x \in B)$$

Vejamos mais um exemplo: Seja A o conjunto de tôdas as letras do alfabeto; e V e C os subconjuntos das vogais e das consoantes, Isto posto, escrevemos:

$$V \cap C = \phi \quad \text{e} \quad V \cup C = A$$

Observamos que a adiçao de classes de congruência difere de reunião das mesmas classes: Com efeito, a módulo 2, e por fôrça da tabuada d [illegible] de somar classes, temos: $C_0 + C_1 = C_1$ e $C_0 \cup C_1 = I_a$ e a módulo 5 encontramos $C_3 + C_2 = C_0$, porém $C_3 \cup C_2$ difere de tôdas as classes.

Para maior esclarecimento afirmamos que se A e B forem subconjuntos de uma coleção S, então $A \cup B$ conterá os elementos de A e os de B, exceção feita para os comuns, - caso existam, - que pertencerão ao conjunto-união sòmente uma vez.

Acreditamos que o exemplo abaixo evidenciará o nosso pensamento: Se $C_1 = (a,b,c,d)$ e $C_2 = (a,c,e,f)$ então $C_1 \cap C_2 = (a,c)$ e $C_1 \cup C_2 =$
$= (a,b,c,d,e,f)$

Vamos realizar a extensão de dois conjuntos para o caso de um número finito e qualquer de conjuntos. Se $A_1$, $A_2$ e $A_3$ forem três subconjuntos, então $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ é o conjunto B dos elementos comuns e não comuns aos três subconjuntos dados, Fig. 11.


Se "n" fôr um número natural e finito, então $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n$ é definida da mesma maneira e escrevemos ainda $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Para ler a notação abreviada $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ usamos da seguinte linguagem: União ou reunião dos conjuntos $A_i$ quando $i$ varia desde 1 até $n$.

## PROPRIEDADES DA REUNIÃO

A reunião de conjuntos é notòriamente comutativa, ou seja $A \cup B = B \cup A$. Semelhantemente, é também associativa, isto é, se A, B e C forem subconjuntos de S, então $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$. Sugerimos ao leitor que verifique a associatividade da reunião com os conjuntos I, F e NQ.

## RELAÇÕES ENTRE REUNIÃO E INTERSECÇÃO

Na Teoria de Números dizemos que a multiplicação é distributiva em face da adição, isto é, se a, b e c forem três números quaisquer, então

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

De modo similar, dizemos que a reunião de conjuntos é distributiva em relação à intersecção e ainda mais, a intersecção de conjuntos é distributiva em relação à reunião. Simbòlicamente $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ~~e A∪(B∪C) = (A∪B)∩(A∪C)~~ onde A, B e C são subconjuntos quaisquer de M. Vamos esclarecer que de fato $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Sabemos que se $X \subset Y$ e $Y \subset X$ ou $X \supset Y$, então $X = Y$. Assim, se o conjunto, simbòlicamente expresso pelo primeiro membro estiver contido no correspondente do segundo membro e se o do segundo estiver contido no do primeiro, então, estará evidente a propriedade em questão.

Vejamos a primeira etapa, isto é, $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Seja x um elemento qualquer pertencente a $A \cup (B \cap C)$, então $x \in A$ ou $x \in B \cap C$. Se $x \in A$, então, por maior razão $x \in A \cup B$ e $x \in A \cup C$ e como tal ............ $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$; Se $x \in B \cap C$, então $x \in B$ e $x \in C$ e como tal $x \in A \cup B$ e $x \in A \cup C$ e também $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Ora, se $x \in A \cup (B \cap C)$ e $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, então

$$A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Agora examinamos a segunda etapa, isto é,

$(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$ Suponhamos um elemento qualquer $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Então, $x \in A \cup B$ e $x \in A \cup C$ e como tal $x \in B$ e $x \in C$ o que permite afirmar $x \in A \cup (B \cap C)$ e assim, está esclarecida a 2ª parte. Logo, por fôrça da primeira premissa a propriedade está evidente.

Deixamos para o leitor demonstrar a distributividade da intersecção em face da reunião.

Afirmamos ser fundamental o conhecimento destas propriedades intra-operacionais, como também a comutatividade e a associatividade de uma operação binária.

## COMPLEMENTAÇÃO DE CONJUNTOS

Se A fôr um subconjunto de S, então a operação geradora do complementar de A, em relação a S é chamada de complementação.

Definimos complementar de A, parte de S, como o subconjunto de S cujos elementos não pertencem ao conjunto A. O complementar de A é anotado por $C_A$ e o simbolismo usual é o seguinte:

$C_A = (x \in S \mid x \notin A)$ O esquema da figura 12, constitue o diagrama de Venn, relativamente ao complementar,

fig 12

Realizaremos um exercício. Seja $D = (1,2,3,4,5,6,7,8,9)$ o conjunto dos números naturais dígitos. A Análise combinatória esclarece que êste conjunto tem $2^9 = 512$ subconjuntos, dos quais destacamos os seguintes: $P = (2,4,6,8)$ $I = (1,3,5,7,9)$ e $P_r = (1,2,3,5,7)$. Isto posto, vamos determinar o complementar de cada um dos 4 conjuntos e após, haveremos de interseccionar e reuní-los 2 a 2.

$C_D = \phi$ $\quad C_P = I$ $\quad C_I = P$ $\quad C_{Pr} = (4,6,8,9)$ $\quad D \cap P = P$

$D \cap I = I$ $\quad D \cap P_r = P_r$ $\quad P \cap I = \phi$ $\quad P \cap P_r = (2)$

$I \cap P_r = (1,3,5,7,)$ $\quad D \cup P = D$ $\quad D \cup I = D$ $\quad D \cup P_r = D$

$P \cup I = D$ $\quad P \cup P_r = (1,2,3,4,5,6,7,8)$ $\quad I \cup P_r = (1,2,3,5,7,9)$

Sugerimos que o leitor calcule o número de subconjuntos de $A = (2,3,5,7)$ forme tôdas as subcoleções, determine o complementar de cada uma, estabeleça tôdas as uniões e intersecções binárias.

## PROPRIEDADES DA COMPLEMENTAÇÃO

Sejam A,B e três subconjuntos de S. Isto posto, apresentamos as propriedades triviais ou imediatas da complementação: 1) - $C_S = \emptyset$ 2) - $C\emptyset = S$ 3) - $C(C_A) = A$ 4) - $A \cap CA = \emptyset$ 5) - $A \cup C_A = S$

Propriedades Triviais: A, B, $\emptyset$ subconjuntos de S

$C_S = \emptyset$. $C\emptyset = S$

$C_{(C_A)} = A$ $\quad A \cup CA = S$ $\quad C \cap CA = \emptyset$

1) - $C\emptyset = S$ 2) - $C_S = \emptyset$ 4) - $A \cap CA = \emptyset$ 5) - $A \cup CA = S$

3) - $C(C_A) = A$

A seguir, verificamos a não distribuidade da complementação diante da intersecção e da reunião, isto é, $C(A \cap B) \neq C_A \cap C_B$ e $C(A \cup B) \neq C_A \cup C_B$

Vamos evidenciar a 1ª afirmação:

Sabemos que $C(A \cap B) = (x \in S | x \notin A \cap B)$ e $C_A \cap C_B = (x \in S | x \notin A) \cap (x \in S | x \notin B)$

Ora, os elementos de $C(A \cap B)$ não podem pertencer a $A \cap B$, mas podem pertencer a A ou B e os de $C_A \cap C_B$ não podem estar em A nem no conjunto B. Portanto, é verdadeiro que a complementação não é distributiva em face da intersecção. Deixamos para o leitor examinar a outra desigualdade.

Na pág. 13 da apostila "Considerações sôbre a Teoria dos Conjuntos", do prof. J. J. Serra Costa, estão demonstradas as chamadas "Leis de Morgan" que apresentaremos simbòlicamente: $C(A \cap B) = C_A \cup C_B$ e $C(A \cup B) = C_A \cap C_B$. Isto é, relações entre as 3 operações estudadas. Aconselhamos ao leitor demonstrá-las pela utilização dos simbolismos de E. H. Spanier.

## DIFERENÇA E PRODUTO CARTESIANO

Definiremos ainda a diferença e produto cartesiano de dois conjuntos. Se A e B forem duas partes do conjunto S, então o prof. E. H. Spanier, da Universidade de Chicago, define diferença entre os conjuntos A e B, dados nesta ordem e anotada por A - B pela intersecção de A com complementar de B. Êste professor usa o simbolismo $A - B = A \cap C_B = \ldots = (x \in S \mid x \in A$ e $x \notin B)$. O esquema da fig. 13, constitue o diagrama de Venn relativo à diferença A - B


$x \notin A$

Veremos que $A - B \neq B - A$. Com efeito, $B - A = B \cap C_A = (x \in B \mid x \notin A)$. Comparando êste simbolismo com o definitório de A - B, concluimos que, de fato, não existe a comutividade e o diagrama de Venn, para B - A é o que segue, fig. 14


Para exercitação, vamos considerar o conjunto A = (2,3,5,7) o qual tem $2^4 = 16$ subconjuntos, a saber:

$A - B \neq B - A$ ($A - B$ é diferente de $B - A$)

$A - B = A \cap C_B = (x \in S \mid x \in A \text{ e } x \notin B)$

$B - A = B \cap C_A = (x \in S \mid x \in B \text{ e } x \notin A)$

$A_0 = \emptyset$ $\quad A_4 = (7)$ $\quad A_8 = (3,5)$ $\quad A_{12} = (2,3,7)$

$A_1 = (2)$ $\quad A_5 = (2,3)$ $\quad A_9 = (3,7)$ $\quad A_{13} = (2,5,7)$

$A_2 = (3)$ $\quad A_6 = (2,5)$ $\quad A_{10} = (5,7)$ $\quad A_{14} = (3,5,7)$ e

$A_3 = (5)$ $\quad A_7 = (2,7)$ $\quad A_{11} = (2,3,5)$ $\quad A_{15} = A$

Isto posto, vamos determinar tôdas as diferenças

$A - A_i$ com $i = (0,1,2, \ldots\ldots, 15)$

$A - A_0 = A \cap C_{A_0} = A \cap A = A$ $\qquad A - A_8 = A \cap C_{A_8} = A \cap A_7 = A_7$

$A - A_1 = A \cap C_{A_1} = A \cap A_{14} = A_{14}$ $\qquad A - A_9 = A \cap A_9 = A \cap A_6 = A_6$

$A - A_2 = A \cap C_{A_2} = A \cap A_{13} = A_{13}$ $\qquad A - A_{10} = A \cap C_{A_{10}} = A \cap A_5 = A_5$

$A - A_3 = A \cap C_{A_3} = A \cap A_{12} = A_{12}$ $\qquad A - A_{11} = A \cap C_{A_{11}} = A \cap A_4 = A_4$

$A - A_4 = A \cap C_{A_4} = A \cap A_{11} = A_{11}$ $\qquad A - A_{12} = A \cap C_{A_{12}} = A \cap A_3 = A_3$

$A - A_5 = A \cap C_{A_5} = A \cap A_{10} = A_{10}$ $\qquad A - A_{13} = A \cap C_{A_{13}} = A \cap A_2 = A_2$

$A - A_6 = A \cap C_{A_6} = A \cap A_9 = A_9$ $\qquad A - A_{14} = A \cap C_{A_{14}} = A \cap A_1 = A_1$

$A - A_7 = A \cap C_{A_7} = A \cap A_8 = A_8$ $\qquad A - A_{15} = A \cap C_{A_{15}} = A \cap A_0 = A_0$

Em simbolismos gerais:

$$A - A_i = A \cap C_{A_i} = A \cap A_{15-i} = A_{15-i}$$

Consideremos ainda dois conjuntos que podem ou não estar contidos em uma coleção S

Definimos produto cartesiano de A por B e anotado por $A \times B$ pelo conjunto cujos elementos são pares ordenados da forma $(a,b)$ com $a \in B$ e $b \in B$. Esta definição possibilita uma mag nífica apresentação das definições de números complexos.

Se R fôr o conjunto dos números reais, então, o produto cartesiano $R \times R = R^2 = \{(a,b),(a',b'),(a'',b''), \ldots\}$ é o conjunto dos números complexos binários onde $(a,b),(a'b'),(a'',b'')$ .... são pares ordenados de números reais. Êstes pares são, por definição, números complexos binários ou com 2 elementos. Determinamos, a seguir, o produto cartesiano de $R^2 \times R$, isto é, $R^3 = \{(a,b,c),(a',b',c'),(a'',b'',c'') \ldots\}$ cujos elementos são ternos ordenados de reais, onde o 1º elemento é um par ordenado de $R^2$ e o 2º um real de R. Os componentes de $R^3$, ternos ordenados de reias, são também chamados de números complexos ternários.

O produto $R^3 \times R$ ou $R^4$ é o conjunto de todos os <u>quaternos ordenados de reais</u> ou númer os complexox com 4 elementos.

$R^3 \times R = R^4 \left[ (a,b,c,d), (a',b',c',d), (a'',b'',c'',d'') \ldots \right]$ O 1º elemento é terno ordenado de reais e o 2º um real de R.

Enfim, $R^n$ é o produto $R^{n-1} \times R$ constituído por coleções ordenadas de "n" números chamados de números complexos com "n" elementos.

O conceito de produto cartesiano de dois conjuntos pode ser ampliado como vamos apresentar:

Sejam "n" conjuntos $A_i$, isto é, $A_1, A_2 \ldots\ldots, A_n$, os quais podem ou não ter elementos comuns, serem coincidentes, ou até constituídos de elementos de diferentes naturezas.

O produto cartesiano deles é o conjunto de tôdas as coleções ordenadas $(a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n)$, ditas também n-uplas ordenadas, onde $a_i \in A_i$ ou mais explicativamente, $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, ...., $a_n \in A_n$.

Simbolicamente, $A_1 \times A_2 \times \ldots\ldots A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i$

O sinal $\prod$ é o P maiúsculo do alfabeto grego e o segundo membro da relação que recém apresentamos é lido como segue: produto cartesiano dos conjuntos $A_i$ quando i varia do 1 até n.

Quanto à Teoria de Conjuntos, já apresentamos as suas noções fundamentais, a Álgebra dos Conjuntos e as operações geradoras da diferença e do produto cartesiano de conjuntos.

~~Para prosseguir, julgamos oportuno iniciar a apresentação da~~
~~Teoria de Funções.~~