# GEOMETRIA PLANA

## 1 - ELEMENTOS FUNDAMENTAIS

Os elementos fundamentais da Geometria são: o ponto, a reta e o plano.
Designaremos os pontos com letras maiúsculas do nosso alfabeto: A, B, C, D, ...; as retas com letras minúsculas: a, b, c, ...; os planos com letras maiúsculas gregas: $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ...

## 2 - PROPOSIÇÕES GEOMÉTRICAS

São proposições geométricas os postulados ou axiomas e os teoremas.

? POSTULADOS ou AXIOMAS são proposições iniciais aceitas sem demonstração.

Ex.: Postulados da reta:

a) A reta tem infinitos pontos.
b) Por um ponto passam infinitas retas.
c) Dois pontos distintos determinam uma única reta.

? TEOREMAS são proposições que devem ser demonstradas para serem aceitas.

Todo teorema é uma afirmação de que, se uma afirmação é verdadeira / (hipótese), então uma outra afirmação também é verdadeira (tese ou conclusão).

? Exemplo:

"Se dois ângulos são opostos pelo vértice, então eles são congruentes".

Os teoremas não necessitam estar sempre na forma "se... então..." mas podemos colocá-los, pois desta forma fica mais claro identificar o que é dado e o que deve ser provado.

Exemplo:

"A intersecção de dois planos é uma reta".

Na forma "se... então ..." fica:

"Se dois planos se interceptam, então sua intersecção é uma reta".

Hipótese: Dois planos se interceptam.

Tese : A intersecção é uma reta.

### TIPOS DE PROVAS

1) Prova direta.

Supomos a hipótese verdadeira e por deduções ou inferências lógicas a partir de axiomas, relações ou propriedades conhecidas chegamos à tese.

É um exemplo dessa demonstração a que usaremos na maioria dos teoremas demonstrados no decorrer desse trabalho.

2) Prova indireta ou redução ao absurdo.

Partimos supondo que a hipótese é verdadeira e a tese é falsa e através de deduções ou inferências lógicas a partir de axiomas, relações ou propriedades conhecidas chegamos a uma contradição ou absurdo.

Exemplo:

"Dois ângulos quaisquer de um triângulo escaleno não podem ser congruentes". (Enunciado do teorema).

Hipótese: O triângulo é escaleno.

Tese ⊖: Dois de seus ângulos não podem ser congruentes.

Primeiro, negamos a tese, supondo que exista pelo menos dois ângulos desse triângulo que são congruentes. Mas, um triângulo que possui dois ângulos congruentes, é isósceles. Assim chegamos a um absurdo. Então, os ângulos do triângulo não podem ser congruentes.

C.Q .D.

3) Prova por contraposição.

Na prova por contraposição, em vez de partirmos da hipótese e chegarmos à tese, partimos da negação da tese e devemos chegar na negação da hipótese.

4) Prova da Existência.

Dada uma proposição quantificada com o quantificador existencial, para provar que é verdadeira basta apresentar o elemento.

Exemplo:

$$(\exists\, x,\ x \in \mathbb{R})\ \left[a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} \Longrightarrow ax + b = 0\right]$$

Seja $x = \frac{-b}{a}$

5) Prova por contra - exemplo.

Esse método é válido para provar a falsidade de proposições quantificadas do tipo universal.

Exemplo:

$$(\forall\, x,\ x \in \mathbb{R})\ \left[x^2 + 16 = (x+4)(x-4)\right]$$

Seja $x = 0$

O importante é salientar o fato de que a prova por contra-exemplo é / um procedimento válido apesar de que os teoremas não são provados pela análise de casos especiais.

6) Prova por indução finita.

Axioma da indução finita (Peano) :

Seja $S$ uma parte qualquer do conjunto $\mathbb{N}^*$ dos números naturais não nulos tal que:

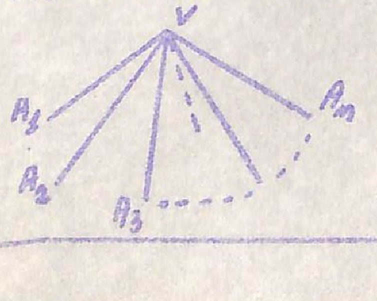
a) $1 \in S$

b) para todo número natural $n \geq 1$, se $n \in S$, então $n + 1 \in S$.

Nestas condições temos $S = \mathbb{N}^*$.

Exemplo:

Se $V(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ é um ângulo poliédrico convexo, então, a / medida do ângulo da face maior é menor que a soma das medidas dos ângulos das outras faces.




Hipótese: $V(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ é um ângulo poliédrico convexo

$A_1\hat{V}A_2$ é a face maior

Tese: $m(A_1\widehat{V}A_2) < m(A_2\widehat{V}A_3) + \ldots + m(A_{n-1}\widehat{V}A_n) + m(A_n\widehat{V}A_1)$.

Demonstração por indução:

a) O teorema é verdadeiro para $n = 3$, isto é, para os triedos

b) Suponhamos verdadeiro para $n-1$ faces e provemos para $n$.

Considerando-se o plano $A_{n-1}VA_1$, $V(A_1, \ldots, A_n)$ fica dividido no ângulo poliédrico $V(A_1, A_2, \ldots A_{n-1})$ e o triedro $V(A_{n-1}A_nA_1)$.

Por hipótese, o teorema é verdadeiro para $n-1$ faces, logo vem:

1) $m(A_1\widehat{V}A_2) < m(A_2\widehat{V}A_3) + \ldots + m(A_{n-2}\widehat{V}A_{n-1}) + m(A_{n-1}\widehat{V}A_1)$

No triedro $V(A_{n-1}A_nA_1)$ vale pelo teorema que diz "no triedro, a medida do ângulo da face maior é menor que a soma das medidas dos / ângulos das outras faces".

2) $m(A_{n-1}\widehat{V}A_1) < m(A_{n-1}\widehat{V}A_n) + m(A_n\widehat{V}A_1)$

Substituindo-se 2) em 1), teremos:

$m(A_1\widehat{V}A_2) < m(A_2\widehat{V}A_3) + \ldots + m(A_{n-2}\widehat{V}A_{n-1}) + m(A_{n-1}\widehat{V}A_n) + m(A_n\widehat{V}A_1)$

o que prova o teorema.

?

Exercícios: grupo 1

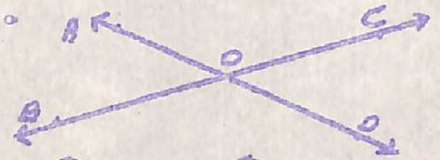
Escreva os enunciados que seguem na forma "se... então ..." e separe a hipótese e a tese.

Exemplo:

"Dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes".

Na forma "se ... então..." teremos:

"Se dois ângulos são opostos pelo vértice, então eles são congruentes".




Hip.: $A\widehat{O}B$ e $C\widehat{O}D$ são ângulos opostos pelo vértice.
Tese: $A\widehat{O}B$ e $C\widehat{O}D$ são congruentes.

1- Dois triângulos que possuem um ângulo congruente situado entre / dois lados respectivamente coongruentes são congruentes.

2- Dois triângulos que possuem um lado congruente adjacente a dois ângulos respectivamente congruentes, são congruentes.

3- Dois triângulos que possuem os três lados respectivamente congruentes, são congruentes.

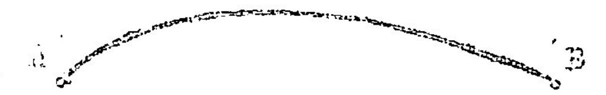
4- Dois ângulos adjacentes cujos lados exteriores estão em linha reta são suplementares.

5- Um ângulo externo de um triângulo é sempre maior que qualquer ângulo interno não adjacente.

[illegible]

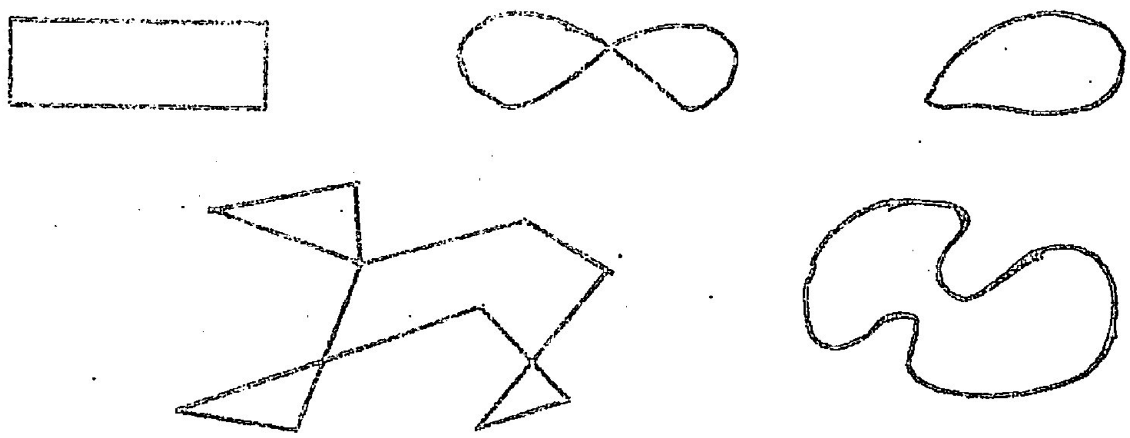
Marque dois pontos distintos, A e B, numa folha de papel (que é a representação de um plano).

Coloque a ponta de um lápis em A e desloque o lápis ao acaso sem levantá-lo do papel até B; assim procedendo você obtém a representação de uma figura geométrica, à qual damos o nome de curva.

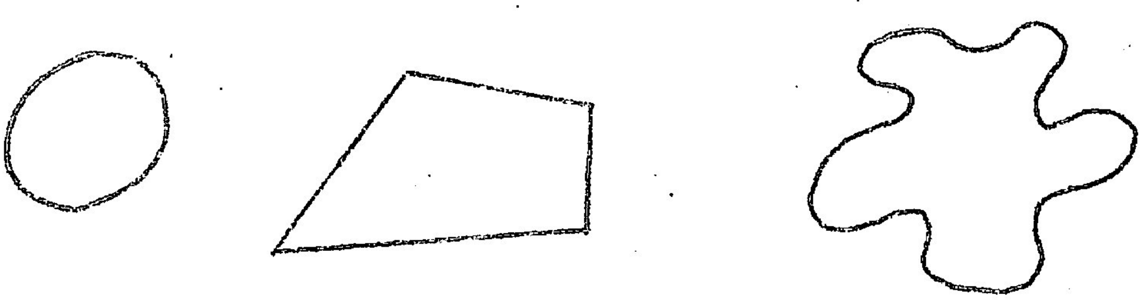



## Curvas fechadas - Curvas fechadas simples

Quando você desloca o lápis com continuidade sobre o papel, e / termina o desenho no ponto onde o iniciou, não passando de volta sobre o trecho já desenhado, você obtém uma figura como as que estão abaixo desenhadas. Uma figura obtida nestas condições chama-se curva fechada.

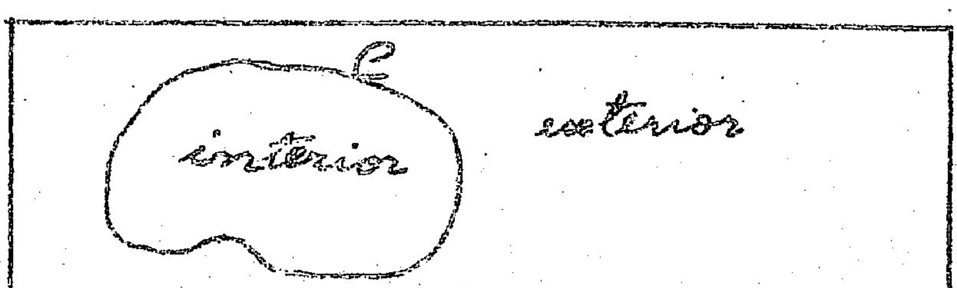


As curvas fechadas que não apresentam cruzamento, isto é, aquelas em que o lápis, ao se deslocar com continuidade sobre o papel, não passa por um ponto mais de uma vez, chamam-se curvas fechadas simples.

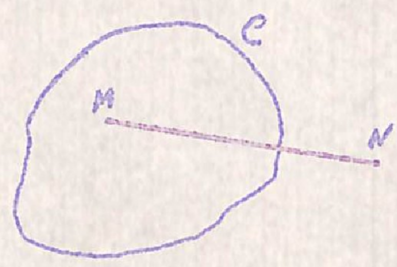


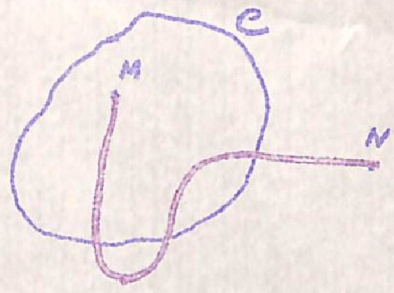
## Interior e exterior de uma curva fechada simples.

Cada curva fechada simples determina no plano três conjuntos de pontos: o conjunto dos pontos internos à curva, a curva e o conjunto de pontos externos à curva. O primeiro conjunto é chamado simplesmente "o interior" da curva e o último, "o exterior" da curva. A curva / C não está contida nem no interior, nem no exterior.



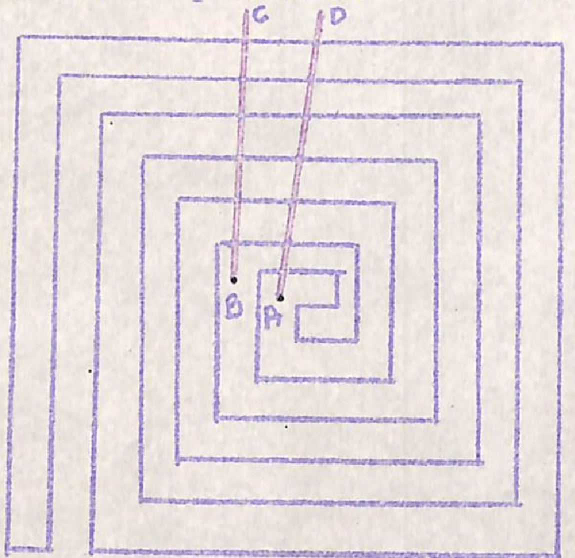
Considere um ponto M do interior de uma curva fechada simples / C, e um ponto N do exterior de C. Una M a N por meio de uma curva; / vamos verificar que qualquer que seja a curva unindo M a N, esta curva corta C em pelo menos um ponto.




Nem sempre a figura de uma curva fechada simples nos permite distinguir rapidamente o seu interior e o seu exterior. Por exemplo, observando a curva fechada simples da figura que segue, torna-se difícil dizer quais são os pontos externos e quais são os pontos internos. O ponto A será interno ? e o ponto B ?

Existe um método simples e rápido, para saber se um ponto é interno ou se é externo a uma curva.




É o seguinte:

Dado um ponto qualquer do plano que não pertença à curva, traça-se um segmento de reta que una esse ponto a um ponto qualquer da margem da folha / de papel.

1º) Se o número de pontos de encontro do segmento de reta com a curva for ímpar, o ponto é interno.

2º) Se o número de pontos de encontro do segmento de reta com a curva for par, o ponto é externo.

$\overline{AD}$ corta a curva em 7 pontos, logo A é ponto interno.

$\overline{BC}$ corta a curva em 6 pontos, logo B é ponto externo.

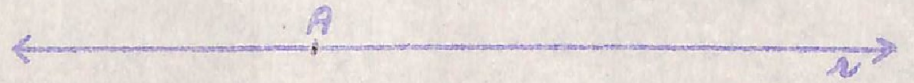
## 4 - RETA, SEMI-RETA, SEGMENTO DE RETA

A reta, como já vimos, é elemento fundamental da Geometria; não tem definição.

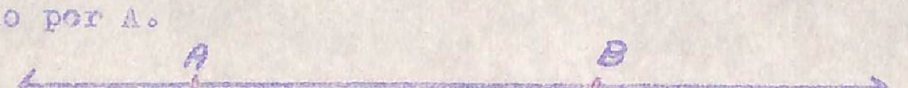
As retas que estão contidas no mesmo plano são ditas coplanares.

Semi-reta: Consideremos a reta "r" e um ponto $A \in r$. O ponto A divide a reta "r" em duas partes; cada uma delas chama-se semi-reta.

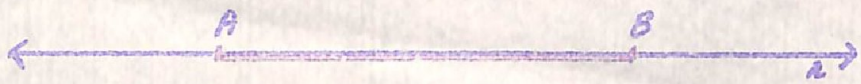
O ponto A é a origem dessas semi-retas.




Marcando os pontos A e B na reta, temos: $\overrightarrow{AB}$ semi-reta de origem no ponto A, passando pelo ponto B; $\overrightarrow{BA}$ semi-reta de origem no ponto / B, passando por A.



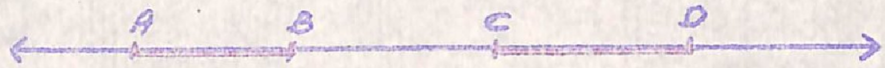
<u>Segmento de reta</u>: Seja a reta "r" e dois pontos distintos A e B pertencentes à reta:




Chama-se segmento de reta, ou simplesmente segmento, ao conjunto dos pontos comuns às semi-retas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$ . Os pontos A e B são os extremos do segmento $\overline{AB}$ e a reta "r" é a reta suporte do segmento $\overline{AB}$ .

Os segmentos podem ser:

a) <u>Colineares</u>- quando estão contidos na mesma reta suporte.




$\overline{AB}$ e $\overline{CB}$ são segmentos colineares.

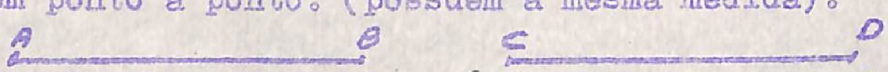
b) Consecutivos- quando o extremo de um é a origem do outro, não possuindo outros pontos em comum.


$\overline{AC}$ e $\overline{CD}$ são segmentos consecutivos

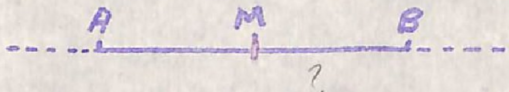
c) Adjacentes- quando dois segmentos forem simultaneamente consecutivos e colineares.


$\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são segmentos adjacentes.

d) Congruentes- Dois segmentos são congruentes quando superpostos coincidem ponto a ponto. (possuem a mesma medida).




Ponto Médio de um segmento: é o ponto que divide o segmento dado em dois outros congruentes.

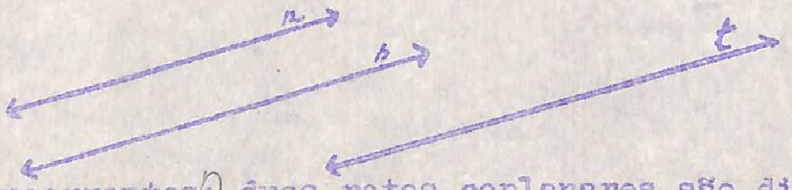



M é ponto médio de $\overline{AB}$ , pois $\overline{AM} = \overline{MB}$ medida ou $\cong$

Mediatriz : Mediatriz de um segmento é a perpendicular ao ponto médio do segmento.

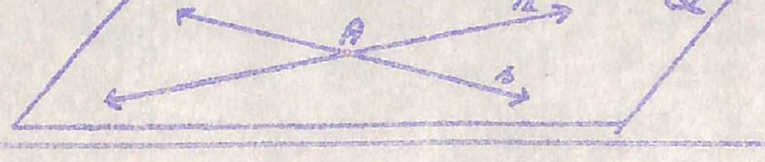
<u>Posições relativas de duas retas:</u>

a) Paralelas: são retas coplanares que seguem a mesma direção. As retas coincidentes são um caso especial de retas paralelas.



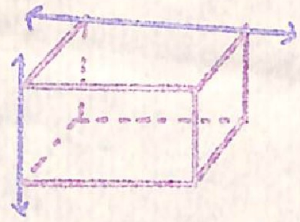

$r \parallel s \parallel t$

b) Concorrentes: duas retas coplanares são ditas concorrentes quando têm apenas um ponto comum entre elas.



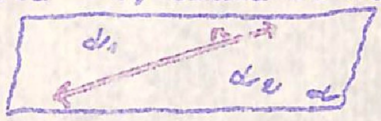

$r, s \subset \alpha$
$r \cap s = \{ A \}$

c) Reversas: são retas não coplanares e que não têm ponto em comum.



Semi-plano: Seja o plano $\alpha$ e a reta r pertencente a $\alpha$. A reta r separa $\alpha$ em duas partes $\alpha_1$ e $\alpha_2$ sem pontos comuns.

A reunião $\alpha_1$ ou $\alpha_2$ com a reta r, chama-se semi-plano. A reta r é a origem de cada semi-plano.



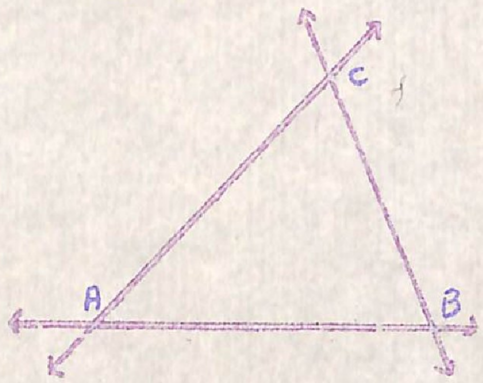
Exercícios: grupo 2 ?

1- Represente um ponto e chame-o de "S".

2- Responda: Quantas retas você pode traçar passando por "S" ?

3- Marque os pontos M e N. Quantas retas distintas? você pode traçar passando por M e N ao mesmo tempo ?

4- Na figura abaixo temos:




a) O ponto de intersecção das retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ é ........

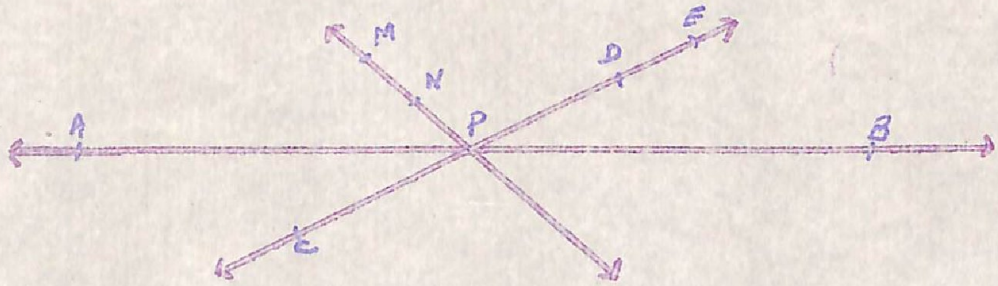
b) A intersecção das retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{CB}$ é .........

c) O ponto B é a intersecção das retas ..........

d) Escreva simbolicamente as questões a, b, c.

5- Marque os pontos R, S, P, Q de modo que sejam colineares.

6- De acordo com a figura que segue, escreva o que for pedido:



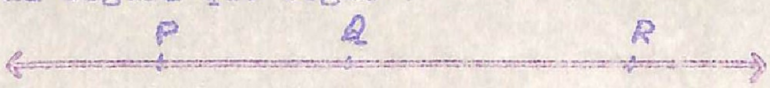

a) Dois segmentos colineares: .................

b) Dois segmentos consecutivos não colineares: .............

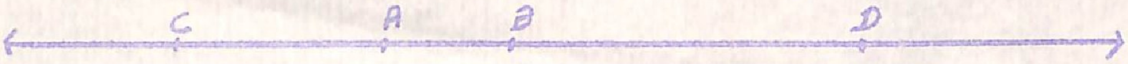
c) Dois segmentos colineares não consecutivos: .............

d) Dois segmentos consecutivos e colineares: ..............

7- Escreva todos os segmentos que ficam determinados com os pontos P, Q, R da figura que segue :



8- Na figura abaixo faça o que se pede a seguir:




a) Assinale a semi-reta $\overrightarrow{AC}$ com lápis vermelho;

b) Assinale a semi-reta $\overrightarrow{AD}$ com lápis azul ,

c) Marque o segmento $\overline{CB}$ com lápis amarelo,

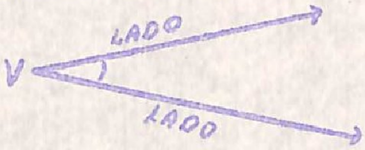
d) Marque o segmento $\overline{AD}$ com lápis laranja.

5 - ÂNGULOS

Conceito: Chama-se ângulo a figura constituida por duas semi-retas de mesma origem, incluindo a região por elas limitada.

Vértice é o ponto de origem comum às duas semi-retas.

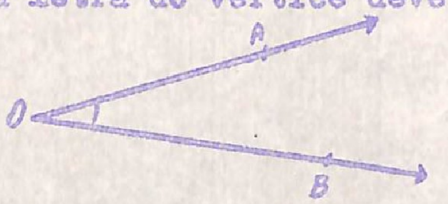
Lados do ângulo são as semi-retas que o formam.




Notação:

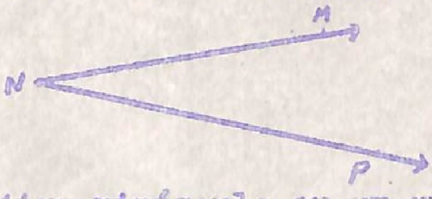
Os ângulos podem ser anotados como segue:

1º) com três letras maiúsculas, uma colocada no vértice e uma em um ponto qualquer de cada um dos lados do ângulo. Na leitura e escrita a letra do vértice deve ficar entre as outras duas.



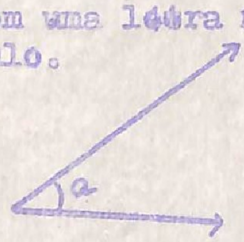

$A\hat{O}B$ ou $B\hat{O}A$

2º) apenas com a letra do vértice, quando isto não trouxer confusão.

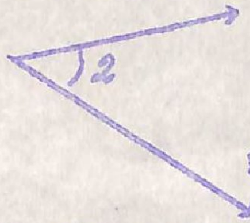



ângulo $\hat{N}$

3º) com uma letra minúscula ou um número escrito no interior do ângulo.




âng. $\hat{a}$

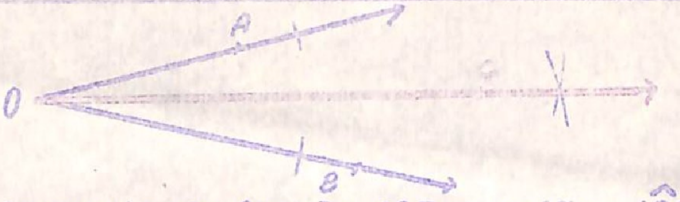



âng. $\hat{2}$

Congruência de ângulos: Dois ângulos são congruentes quando através de uma translação e, ou rotação podem coincidir ponto a ponto.

Dois ângulos congruentes têm a mesma medida.

Bissetriz é a semi-reta que, com origem no vértice do ângulo , forma, com os lados desse ângulo, dois ângulos congruentes.




OC é bissetriz do ângulo AOB, então $A\hat{O}C \cong B\hat{O}C$

(o sinal $\cong$ significa: congruente )

Medida:

As unidades usadas para medir ângulos são: o grau ( $^{\circ}$ ), o grado (gr), e o radiano (rd), e o instrumento usado para realizar esta medida é o transferidor.
essa

Postulado da medida de ângulos:

A cada ângulo corresponde um número real de $0^{\circ}$ a $180^{\circ}$ que é a medida do ângulo em graus.

O grau possui dois submúltiplos: o minuto ( ' ) que vale $\frac{1}{60}$ do grau e o segundo ( '' ) que vale $\frac{1}{60}$ do minuto ou $\frac{1}{3.600}$ do grau.

Entre as grês unidades de medida de ângulos existe a seguinte relação:

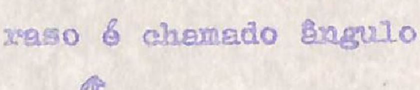
$180^{\circ} \longrightarrow 200\ gr \longrightarrow \pi\ rd$

convenção

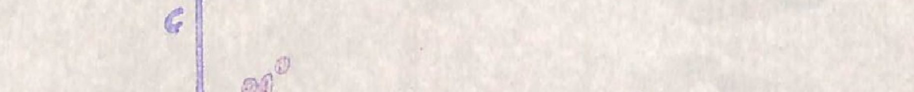
Quando queremos nos referir à medida do ângulo, usaremos sòmente a letra minúscula colocada no interior do ângulo sem o sinal de ângulo ( ^ ).

Tipos de ângulos:

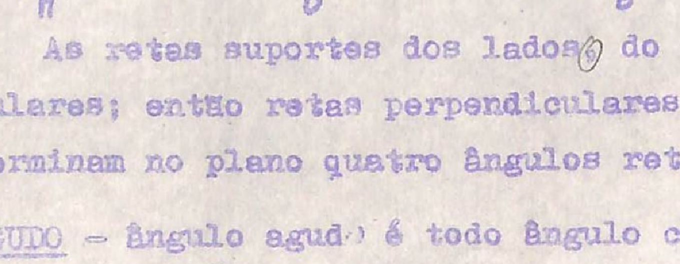
NULO - um ângulo é dito nulo, quando as duas semi-retas que o formam são coincidentes. O ângulo nulo mede zero graus.




RASO - um ângulo é raso quando as duas semi-retas que o formam têm sentidos opostos. O ângulo raso mede $180^{\circ}$ .



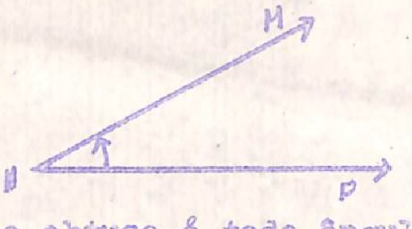

RETO - cada um dos ângulos congruentes determinados pela bissetriz de um ângulo raso é chamado ângulo reto. O ângulo reto mede $90^{\circ}$.




$B\hat{O}C$ é ângulo reto.

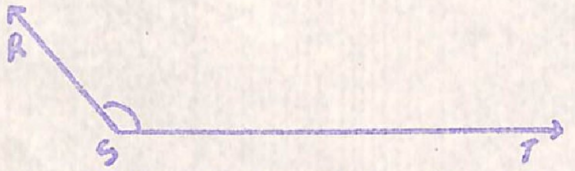
As retas suportes dos lados do ângulo reto são ditas perpendiculares; então retas perpendiculares são retas concorrentes que determinam no plano quatro ângulos retos.

AGUDO - ângulo agudo é todo ângulo cuja medida é maior que $0^{\circ}$ e menor que $90^{\circ}$.




$M\hat{N}P$ é ângulo agudo.

OBTUSO – ângulo obtuso é todo ângulo cuja medida é maior que $90^{\circ}$ e menor que $180^{\circ}$.



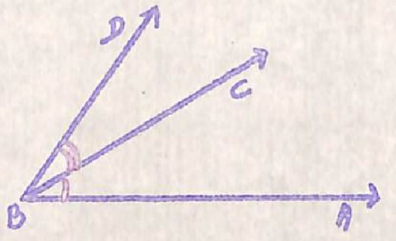

$R\hat{S}T$ é ângulo obtuso.

COMPLEMENTARES – dois ângulos são complementares quahdo a soma de suas medidas nos dá $90^{\circ}$. Cada um dos ângulos se diz complemento do outro.

SUPLEMENTARES – ângulos suplementares são dois ângulos cuja soma de suas medidas dá o valor de um ângulo raso ou seja, $180^{\circ}$.

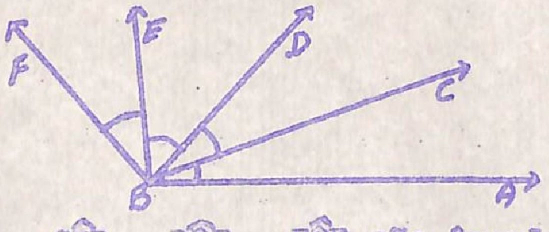
Cada um dos dois ângulos se diz suplemento do outro.

ADJACENTES – dois ângulos são adjacentes quando possuem o mesmo vértice, um lado comum e não possuem pontos interiores comum.



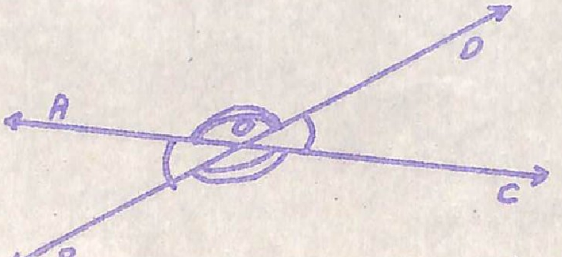

$A\hat{B}C$ e $C\hat{B}D$ são ângulos adjacentes.

CONSECUTIVOS – vários ângulos adjacentes dois a dois, tendo o vértice comum, são chamados consecutivos.




$A\hat{B}C$ , $C\hat{B}D$ , $D\hat{B}E$ , $E\hat{B}F$ são ângulos consecutivos.

OPOSTOS PELO VÉRTICE – dois ângulos são opostos pelo vértice, quando os lados de um são semi-retas opostas aos lados do outro.




$A\hat{O}B$ e $D\hat{O}C$ são opostos pelo vértice.

$A\hat{O}D$ e $B\hat{O}C$ são opostos pelo vértice.