TRABALHANDO COM CONJUNTOS

Uma coleção de objetos ou símbolos é um conjunto.
Exemplos: um time de futebol é um conjunto de jogadores.
as letras a,e,i,o,u, formam um conjunto de vogais.

Representamos um conjunto por letras maiúsculas do nosso alfabeto: A, B, C, ...

Para relacionarmos um elemento com um conjunto usamos os símbolos $\in$ (pertence) ou $\notin$ (não pertence).

Exemplos: $4 \in \{1,2,3,4\}$
$a \in \{a,e,i,o,u\}$
$z \notin \{1,4,5\}$

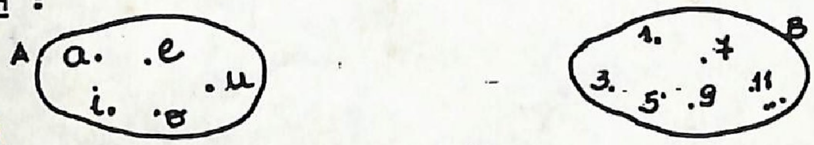
Assim estabelecemos uma <u>relação de pertinência</u> entre os <u>elementos</u> dos conjuntos e os <u>conjuntos</u>.

Podemos determinar um conjunto de três maneiras:

<u>EXTENSÃO</u> : escrevemos todos os elementos do conjunto entre chaves.
Exemplos: $A = \{a,e,i,o,u\}$
$B = \{1,3,5,7,9,...\}$

<u>COMPREENSÃO</u> : escrevemos uma propriedade característica de seus elementos.
Exemplo: $A = \{x \mid x \text{ é vogal}\}$
$B = \{x \mid x \text{ é número ímpar}\}$

<u>DIAGRAMA</u> :

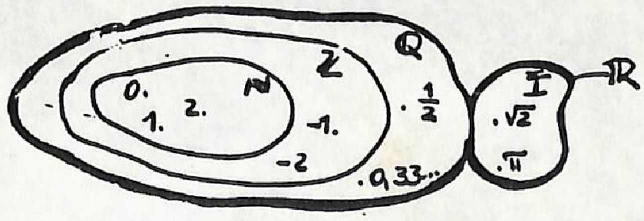


<u>CONJUNTO UNIVERSO</u> : é o conjunto ao qual pertencem todos os elementos que estamos trabalhando. Notação: $\mathcal{U}$

<u>CONJUNTO VAZIO</u> : é o conjunto que não tem elementos.
Notação: $\{\ \}$ ou ϕ

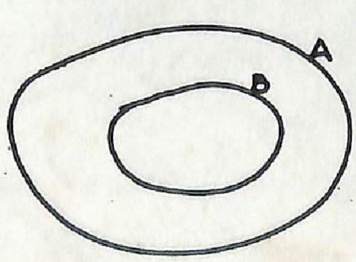
<u>CONJUNTO UNITÁRIO</u> : é o conjunto que tem somente um elemento.
Exemplos : $\{a\}$; $\{0\}$; $\{\phi\}$

CONJUNTOS NUMÉRICOS :



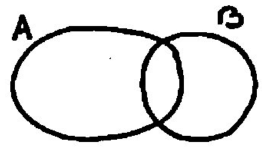
SUBCONJUNTOS

Sejam os conjuntos $A = \{2,3,5,7\}$ e $B = \{2,5\}$
Observamos que os elementos do conjunto B são elementos do conjunto A.
Dizemos que o conjunto B <u>está contido</u> no conjunto A, isto é, $B \subset A$ ou que o conjunto A <u>contém</u> o conjunto B, isto é, $A \supset B$.
Num diagrama temos:



$B \subset A$ ou $A \supset B$

Se ao menos um elemento do conjunto B não pertencer ao conjunto A, dizemos que o conjunto B <u>não está contido</u> em A, isto é, $B \not\subset A$ ou que o conjunto A <u>não contém</u> o conjunto B, isto é, $A \not\supset B$.
Num diagrama temos:



$B \not\subset A$ ou $A \not\supset B$

Definição:
Um conjunto B é <u>subconjunto</u> de um conjunto A se e somente se B está contido em A, isto é $B \subset A$.

<u>Observações</u>:
a) O conjunto vazio está contido em qualquer conjunto.
b) Todo o conjunto está contido em si mesmo.
c) Os símbolos $\subset$, $\supset$, $\not\subset$, $\not\supset$ são usados para relacionar um conjunto com outro conjunto.

<u>EXERCÍCIOS</u>

1. Determina por extensão os conjuntos:
   a) A = {x / x é número par maior que 20}
   b) B = {x / x é letra da palavra "cama"}
   c) C = {x / x é ímpar compreendido entre 6 e 12}
   d) D = {x / x é mês do ano que começa com a letra M}

2. Detremina por compreensão os conjuntos:
   a) A = {m, e, s, a}
   b) B = {3, 4, 5, 6, 7, 8}
   c) C = {12, 14, 16, 18, ...}
   d) D = {5, 7, 9, 11, 13}

3. Sendo $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ é múltiplo de $5\}$
   $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ é múltiplo de $10\}$
   determina os conjuntos abaixo, por compreensão:
   a) C = {0, 5, 10, 15, 20, 25, 30}
   b) D = {0, 10, 20, 30, 40, 50 60, 70}
   c) E = {5, 15, 25, 35, 45, 55, ...}

4. Sendo M = {1, 2, 3, 4, 8, 9}, T = {4, 3, 5} e S = {4, 8, 3, 1}
   dá o valor lógico de cada afirmação abaixo.
   ( ) $M \supset S$ ( ) $T \subset M$ ( ) $M \not\subset T$
   ( ) $S \not\subset T$ ( ) $S \subset M$ ( ) $T \supset S$

5. Constrói um diagrama que representa a situação abaixo, para os conjuntos A, B, C, D não vazios.
   $B \subset A$, $C \not\subset A$, $B \neq C$, $D \subset B$, $D \subset C$

6. Dá o valor lógico de cada proposição

(V) $5 \in \{4,5,6\}$	(V) $2 \in \{1,7,2\}$	(F) $7 \notin \{7,0,2,5,6\}$
(F) $0 \notin \{3,4,0\}$	(F) $2 \notin \{1,7,2\}$	(V) $\{a,b\} \supset \phi$
(V) $\{a\} \subset \{a,b,c\}$	(V) $\{4, 5\} \supset \{5,4\}$	(F) $\{\ \} \supset \{4,6\}$
(F) $\{a\} \supset \{a,b,d\}$	(F) $\{3,8,1\} \supset \{2\}$	(F) $\{3\} \in \{1,2, 3\}$

7. Sejam os conjuntos

$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 9 \wedge x > 0\}$
$C = \{x \mid x^2 - 8x + 15 = 0\}$
$D = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 5\}$

Completa as sentenças abaixo com um dos símbolos $\subset$, $\supset$, ou =

A......B   B......C   B......D

A......D   C......A   C......D

8. Sejam $A = \{x,y,z\}$ e $B = \{x\}$

a) escreve com símbolos da teoria de conjuntos, as sentenças

x é um elemento do conjunto A ....

y não é elemento de B ....

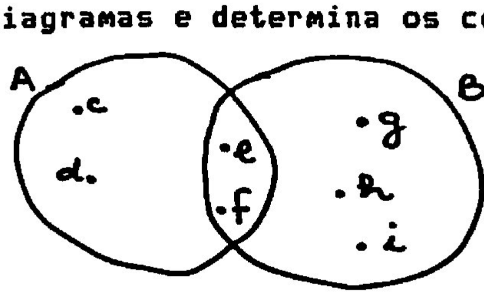
B é subconjunto de A ....

y pertence a B ....

A contém B ....

b) classifica as sentenças acima em V ou F.

9. Observa os diagramas e determina os conjuntos por extensão.



a) $\{x \mid x \in A \wedge x \in B\} =$
b) $\{x \mid x \in B \wedge x \notin A\} =$
c) $\{x \mid x \notin A \wedge x \notin B\} =$
d) $\{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} =$
e) $\{x \mid x \in A \vee x \in B\} =$

EXERCITANDO	Respostas:
1. Completa: a) O conjunto C das vogais $C = \{ \quad \}$ b) Conjunto dos nº pares maiores que 1 e menores que 6 c) Conjunto F dos nº primos menores que 9 $F =$	a) $\{a,e,i,o,u\}$ b) $\{2,4\}$ c) $\{2,3,5,7\}$
2. Observa o conjunto $A = \{2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Completa usando $\in$ ou $\notin$. a) 2....A b) 3....A c) 10....A d) 6....A	$\in, \in, \notin, \in$
3. Escreve por extensão o conjunto $A = \{x \in N \mid x$ é par e maior que $3\}$. $A = \{ \quad \}$	$\{4,6,8,10...\}$
4. Escreve por compreensão o conjunto $B = \{1,3,5,7,9\}$. $B = \{ \quad \}$	$\{x \mid x$ é ímpar e $x \leq 9\}$
5. Representa por extensão o conjunto $A = \{x \mid x$ é par e ímpar$\}$. $A = \{ \quad \}$	$\{ \}$ ou $\emptyset$
6. Representa por extensão o conjunto $A = \{x \mid x$ é par e primo$\}$. $A = \{ \quad \}$	$\{2\}$
7. Completa usando os símbolos $\subset$, $\supset$, $\not\subset$ ou $\not\supset$. a) $\{a, e, b\}$ .... $\{a, e, i, b, c\}$ e) $\{a,b\}$ .... $\{b,a,c\}$ b) $\{b,c\}$ .... $\{a,e,i,b,c\}$ f) $\{a,e,i,c\}$ .... $\{a,e\}$ c) $\{a,b,e,i,c\}$ .... $\{i,a\}$ g) $\{m,n,i\}$ .... $\{a,b,i\}$ d) $\{m,n,a\}$ .... $\{a,e,i,o,u\}$ h) $\{i,e\}$ .... $\{a,b,c,e,i\}$	$\subset$ $\subset$ $\subset$ $\supset$ $\supset$ $\not\subset$ $\not\subset$ $\subset$
8. Sendo $M = \{1,2,3,4,8,9\}$, $T = \{4,3,5\}$ e $S = \{4,8,3,1\}$ assinala com V ou F. ( ) $M \not\supset S$ ( ) $T \subset S$ ( ) $M \supset S$ ( ) $S \subset T$ ( ) $M \supset T$ ( ) $T \not\supset M$	F F V F F V
9. Completa com V ou F ( ) $6 \in \{4,5,6\}$ ( ) $\{12\} \not\subset \{4,7,12\}$ ( ) $9 \notin \{9,0,16\}$ ( ) $10 \notin \{13,14,10\}$ ( ) $\{4\} \in \{11,7,4\}$ ( ) $\{a,b\} \supset \emptyset$	V F F F F V
10. Escreve por extensão a) O conjunto dos números pares menores que 9. b) $\{x \in N \mid x \leq 6\}$ c) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x < 3\}$	a) $\{0,2,4,6,8\}$ b) $\{0,1,2,3,4,5,6\}$ c) $\{2,1,0,-1,...\}$
11. Escreve por compreensão a) $\{0,4,8,12,16,20,...\}$ b) $\{2,3,5,7,11,13,...\}$	a) $\{x \in N / x$ é múltiplo de $4\}$ b) $\{x / x$ é primo$\}$

CONJUNTOS DAS PARTES

1. Dado $A = \{1,2,3\}$, completa:

   a) O conjunto sem elementos contido em A é ______________

   b) Os conjuntos unitários contidos em A são ______________

   c) Os conjuntos binários contidos em A são ______________

   d) Os conjuntos com 3 elementos contidos em A são ______________

   e) Os conjuntos com mais de 3 elementos contidos em A ______________

   f) O conjunto de TODOS os subconjuntos de A é:

   ____

> O conjunto representado no ítem f acima, é chamado de CONJUNTO DAS PARTES DE A e representado por $\mathcal{P}(A)$.

2. Sendo $B = \{x,y\}$, determina o conjunto das partes de B.

   $\mathcal{P}(B) =$

3. Sendo $C = \{a, b, c, d\}$

   a) determina o conjunto das partes de C.

   b) Completa com $\in$ ou $\subset$ ou $\supset$
   $\notin$ ou $\not\subset$ ou $\not\supset$

a C	ϕ C	$\{b\}$ .... $\mathcal{P}(C)$
$\{a\}$ C	ϕ .... $\mathcal{P}(C)$	$\{\{b\}\}$ .... $\mathcal{P}(C)$
$\{a\}$ .... $\mathcal{P}(C)$	$\{\phi\}$ .... $\mathcal{P}(C)$	$\{\{c\}\}$ .... $\mathcal{P}(C)$
$\{a,b\}$ .... $\mathcal{P}(C)$	h .... $\mathcal{P}(C)$	C ...... $\mathcal{P}(C)$
$\{a,e\}$ ... $\mathcal{P}(C)$	C .... $\{b,d\}$	$\mathcal{P}(C)$ ..... $\{\{a\},\{c\},\{d\}\}$

4. Sabendo que D é um conjunto qualquer não vazio, dizer quais das sentenças são verdadeiras:

   a) $D \in \mathcal{P}(D)$ c) $\{D\} \subset \mathcal{P}(D)$ e) $\phi \in \mathcal{P}(D)$

   b) $D \subset \mathcal{P}(D)$ d) $\{D\} \in \mathcal{P}(D)$ f) $\phi \subset \mathcal{P}(D)$

11 12

Observação: Se o conjunto A tem n elementos, então o conjunto $\mathcal{P}(A)$ terá 2^n elementos; assim se um conjunto tem 5 elementos o conjunto das partes dele terá 32 elementos.

5. Determina o número de elementos de $\mathcal{P}(E)$ quando:

   a) $E = \{0,1,2,3,4,5\}$

   b) $E = \{1,2,3,\ldots,9\}$

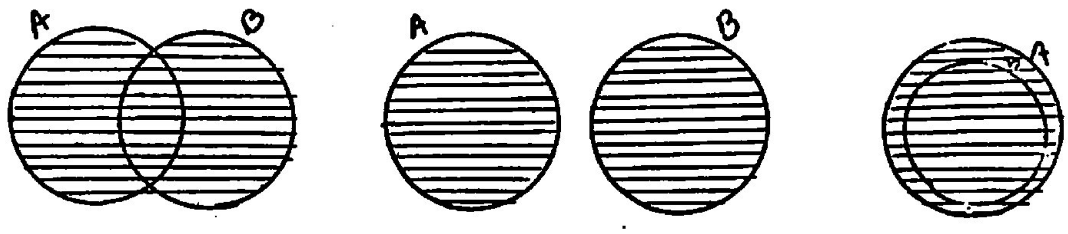
   c) $E = \{x \mid x$ é nº par menor que $8\}$

OPERANDO COM CONJUNTOS

UNIÃO - Dados os conjuntos A e B, o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A ou a B é chamado de conjunto União de A e B.
Simbolicamente:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

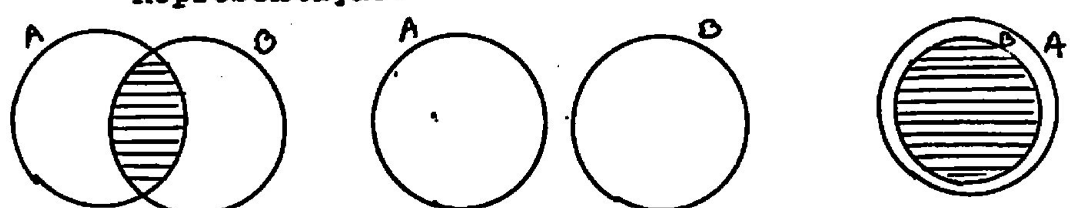
Representação:



INTERSECÇÃO - Dados os conjuntos A e B, o conjunto formado por elementos que pertencem a A e a B, é chamado de conjunto Intersecção de A e B.
Simbolicamente:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

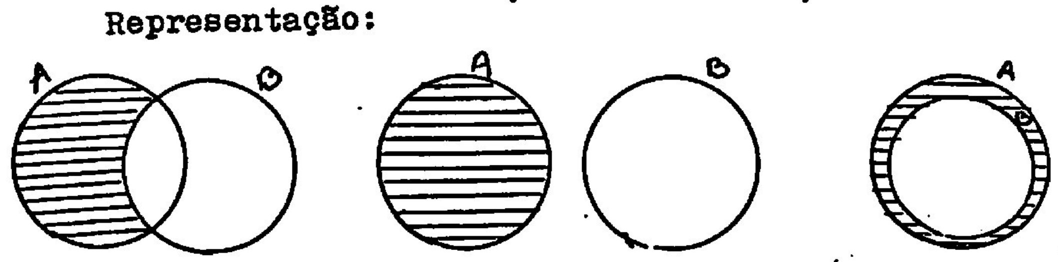
Representação:



DIFERENÇA - Dados os conjuntos A e B, o conjunto diferença A - B é o conjunto formado pelos elementos que pertencem ao conjunto A e não pertencem ao conjunto B.
Simbolicamente:

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

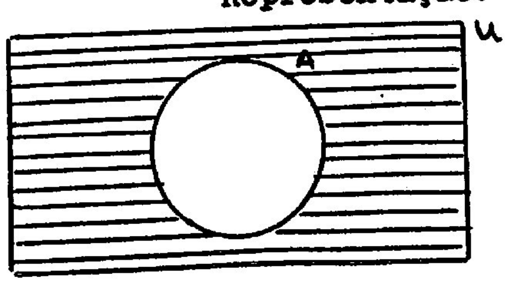
Representação:



COMPLEMENTAR- Dado um conjunto U a um conjunto A, tal que $A \subset U$, chama-se complementar de A em relação à U o conjunto formado pelos elementos de U que não pertencem à A.
Simbolicamente:

$$\complement_U A = \{x \mid x \in U \wedge x \not\subset A\}$$

Representação:



complementar de A em relação a U

EXERCITANDO...

1. Considerando os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 5, 6\}$ e $C = \{2, 4, 6, 8\}$, determina:

$A \cup B =$

$A \cup C =$

$B \cup C =$

$A \cup A =$

$A \cup (B \cup C) =$

$A \cap B =$

$A \cap C =$

$B \cap C =$

$A \cap B \cap C =$

$(A \cap B) \cap C =$

$A \cap (B \cap C) =$

$(A \cup B) \cap C =$

$(A \cap C) \cup (A \cap B) =$

$(A \cup C) \cap (A \cup B) =$

$A \cup \emptyset =$

$B \cap \emptyset =$

2. Dado $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e os conjuntos $B = \{x \in U / x \text{ é par}\}$, $C = \{x \in U / x \text{ é ímpar}\}$ $D = \{1, 3\}$ e $E = \{\ \}$, determina:

a) $C_U\ B =$

b) $C_U\ C =$

c) $C_U\ D =$

d) $C_U\ E =$

e) $C_U\ B \cup C =$

f) $C_U\ D \cap C =$

3. Dados $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $C = \{1, 2\}$ e $D = \{6, 7\}$, determina:

a) $A \cup B \cup C \cup D =$

b) $A \cap B \cap C =$

c) $(A \cup D) \cap (B \cup C) =$

d) $B - A =$

e) $A - D =$

f) $C - A =$

g) $B - D =$

h) $C - B =$

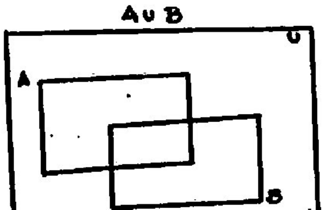
i) $C_B\ A =$

j) $C_B\ C =$

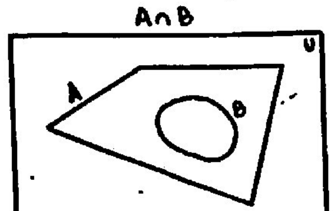
L) $B - (D \cap C) =$

4. Em cada um dos diagramas abaixo, sombrear o que estiver indicado:

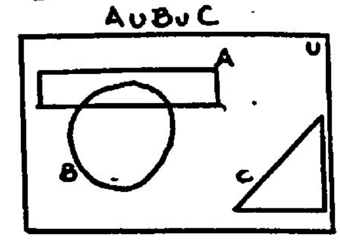
$A \cup B$



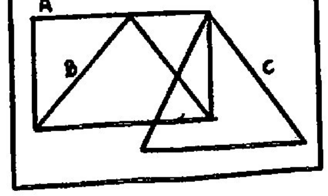
$A \cap B$



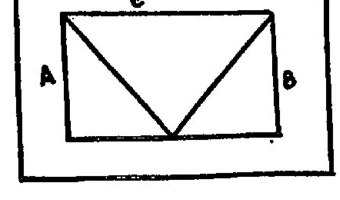
$A \cup B \cup C$



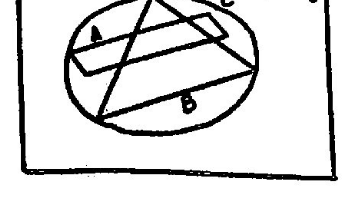
$A \cap B \cap C$



$(A \cup B) \cap C$



$(A \cap B) \cup C$



EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1. Considera os conjuntos:

$A = \{1, 2, 3, 4\}$; $B = \{2, 4, 6\}$; $C = \{0, 1, 2\}$

$D = \emptyset$, calcula:

a) $A \cup B =$

b) $A \cap C =$

c) $A - B =$

d) $C - A =$

e) $\complement_{\mathbb{N}} B =$

f) $(D \cup A) - (B \cap C) =$

g) $(A \cup B) - (C \cup D) =$

i) $\complement_{\mathbb{N}}(C - B) =$

2. Considerando os conjuntos $A = \{a, b, c, d, e\}$; $B = \{a, e\}$ $C = \{b, c, d\}$ todas contidas no universo $U = \{a, b, c, d, e, f\}$ determina:

a) $\complement A =$

b) $\complement B =$

c) $\complement C =$

d) $A - B =$

e) $A - C =$

f) $(A \cap C) \cup B =$

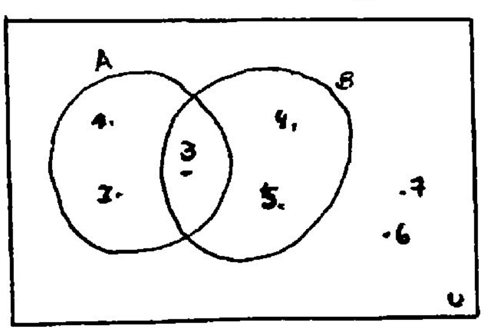
g) $\complement (A \cup B) =$

h) $\complement (A - C) =$

i) $\complement_A B =$

j) $\complement (A \cap C) \cup \complement (A \cap B) =$

3. De acordo com a figura completa:



a) $A \cap B =$

b) $A - B =$

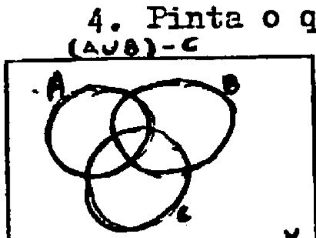
c) $\complement_U (A \cup B) =$

d) $(A \cup B) - (B - A) =$

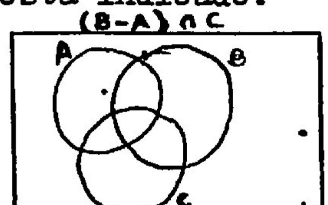
e) $(A \cap B) - \{3\} =$

4. Pinta o que está indicado:

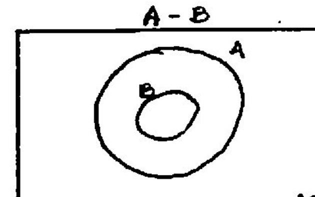
$(A \cup B) - C$

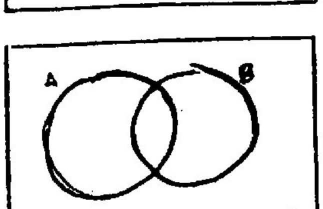


$(B - A) \cap C$

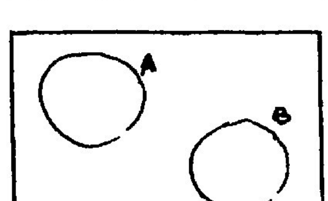


$A - B$

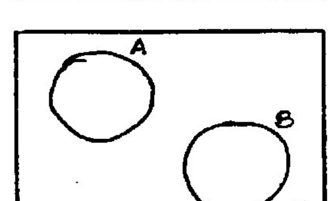




$\complement_U A$



$\complement_U (A \cup B)$



$(A \cap B) \cup A$

Exercícios de reforço

1) Completa a afirmação para torná-la verdadeira.
SE A tem 5 elementos, B tem 8 elementos e $A \cap B$ tem 4 elementos, então $A \cup B$ tem .... elementos.

2) Numa cidade existem 2 jornais , A e B, que tem juntos 5000 assinantes. O jornal A tem 2800 assinantes e os dois jornais tem 400 assinantes comuns. Quantos assinantes tem o jornal B?

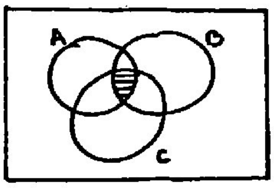
3) Numa cidade são consumidos três produtos A, B e C. Feito um levantamento de mercado sobre o consumo destes produtos, obteve-se o seguinte resultado:

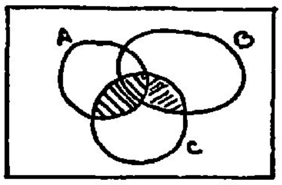
Produtos	A	B	C	A e B	A e C	B e C	A,B e C	Nenhum
número de consumidores	150	200	250	70	90	80	60	180

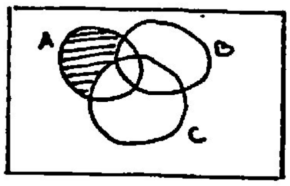
Pergunta-se:
a) quantas pessoas consomem o produto A ou o B?
b) quantas pessoas consomem o produto A ou o C?
c) quantas pessoas consomem o produto B ou o C?
d0 quantas pessoas foram consultadas?

4) Sendo A e B dois conjuntos quaisquer, subconjuntos de U, é verdadeira a afirmação:
a) $A - B = B - A$
b) $(A \cup B) \cap A = B$
c) $B - \complement_u A = B \cap A$
d) $\complement_u B = \complement_u A$

5) Observa os diagramas abaixo e dize que conjunto representa a parte hachurada de cada um deles.

a) 

b) 

c) 

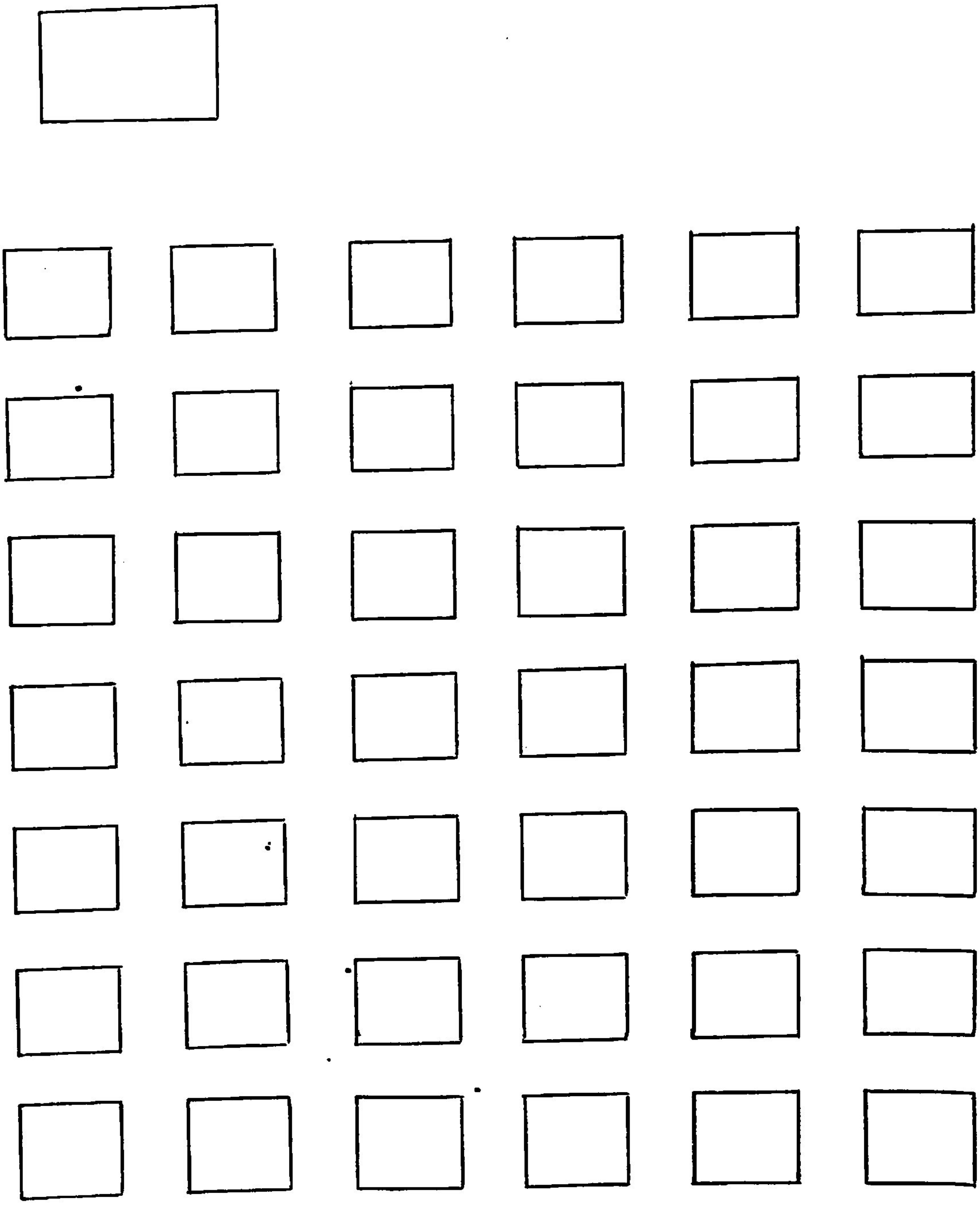
6) Sendo $A = \{\phi, a, \{b\}\}$ com $\{b\} \neq a \neq b \neq \phi$ então podemos afirmar:

a) $\{\phi, \{a\}\} \subset A$ b) $\{\phi, \{b\}\} \subset A$ c) $\{\phi, b\} \subset A$ d) $\{\{a\}, \{b\}\} \subset A$

7) Associa V ou F a cada uma das seguintes afirmações:

a) $A \subset (A \cup B)$ ( )
b) $A \subset (A \cap B)$ ( )
c) $(A \cap B) \subset A$ ( )
d) $\emptyset \supset A$ ( )
e) $(A \cup B) \subset (A \emptyset B)$ ( )
f) $(A \cap B) \subset (A \cup B)$ ( )
g) $(A \cup B) \subset (A \cap B)$ ( )
h) $\phi \subset (A \cap B)$ ( )
i) $A - B \subset A \cap B$ ( )
j) $B - A \subset A \cup B$ ( )

PAR ORDENADO

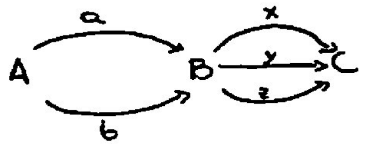


PRODUTO CARTESIANO

Sejam as cidades A, B e C.

Consideremos $\{ a , b \}$ o conjunto das estradas que ligam A e B e $\{ x , y , z \}$ o conjunto das estradas que ligam B e C.

Assim :



De quantos modos diferentes podemos ir de A até C passando por B ?

Quais são estes modos ?

Seja : A = {  .  .  } e B = {  ,  ,  }

De quantas maneiras diferentes poderei me vestir usando uma blusa e uma saia ?

Seja $A = \{ 1 , 2 , 3 , 4 \}$ o conjunto das colunas e $B = \{1,2,3,4,5\}$ o conjunto das filas de classes de uma sala de aula.

O conjunto de todas as possíveis posições (coluna, fila) será :

$\{ (1 , 1),(1 ,2) \ldots \qquad \}$

A este conjunto damos o nome de Produto Cartesiano de A por B e representamos A x B .

DEFINIÇÃO :

Produto Cartesiano de A por B (A x B) é o conjunto de todos os pares ordenados em que o primeiro elemento do par pertence a A e o segundo elemento pertence a B .

$$A \times B = \{ (x , y) \ / \ x \in A \quad e \quad y \in B \}$$

Observe que :

Se o número de elementos de **A** é 3 e o número de elementos de **B** é 5 então o número de elementos de A x **B** é : 3 x 5 = 15 .

Podemos representar o produto cartesiano de dois modos :

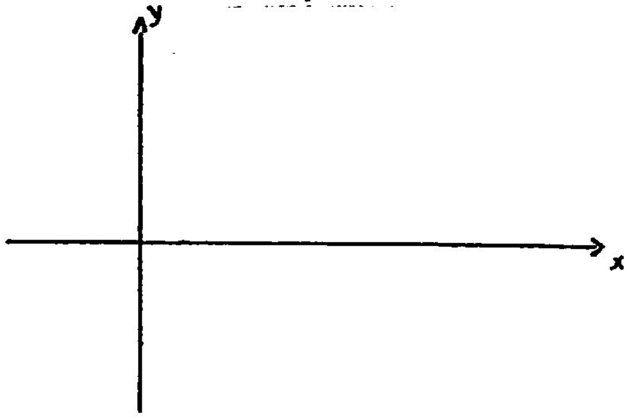
1) Em diagrama

2) Em gráfico Cartesiano

Exercitando ...

1. No plano cartesiano abaixo localiza os pontos, une-os e descobre o desenho.

A (4 ,-2)   B (4 , 1)
C (2 , 1)   D (2 ,-2)
E (-2,-2)   F (-2 , 1)
G (2 , 4)   H (6 , 1)
I (6 ,-2)   A (4 , -2)



2. Dados $A = \{-1,0,1\}$; $B = \{1,2\}$ e $C = \{-2,2,-1\}$ determina os seguintes produtos cartesianos, representa-os em diagrama e no plano cartesiano.

a) $A \times B =$

b) $B \times C =$

c) $C \times A =$

d) $B^2 =$

3. Inventa um desenho e escreve os pares ordenados correspondentes.

R E L A Ç Õ E S

Sejam os conjuntos $A = \{2,3,4,5\}$ e $B = \{1,2,3\}$

$A \times B =$

a) Escreve o conjunto R_1 dos pares ordenados de $A \times B$ em que $x < y$

b) Escreve o conjunto R_2 dos pares ordenados de $A \times B$ em que $x = y$

c) Escreve o conjunto R_3 dos pares ordenados de $A \times B$ em que $x + y = 5$

$R_1 = \{ \qquad\qquad\qquad\qquad \} \longrightarrow R_1 \subset A \times B$

$R_2 = \{ \qquad\qquad\qquad\qquad \} \longrightarrow R_2 \subset A \times B$

$R_3 = \{ \qquad\qquad\qquad\qquad \} \longrightarrow R_3 \subset A \times B$

Dados dois conjuntos A e B, chama-se Relação de A em B a qualquer subconjunto do produto cartesiano de A x B .

R é relação de A em B $\iff$ $R \subset A \times B$

$R_1 = \{ (x,y) \in A \times B \ / \ x < y \}$

$R_2 = \{ (x,y) \in A \times B \ / \ x = y \}$

$R_3 = \{ (x,y) \in A \times B \ / \ x + y = 5 \}$

Dada uma relação de A em B, define-se :

CONJUNTO DE PARTIDA é o conjunto A .

CONJUNTO DE CHEGADA é o conjunto B .

DOMÍNIO da relação R é o conjunto dos primeiros elementos dos pares ordenados que pertencem a R.

$$\mathrm{Dom}\,(R) = \{ x \in A \ / \ (x,y) \in R \}$$

IMAGEM da relação R é o conjunto dos segundos elementos dos pares ordenados que pertencem a R .

$$\mathrm{Im}\,(R) = \{ y \in B \ / \ (x,y) \in R \}$$

Exercícios :

1. Seja $A = \{-1,0,1,2\}$ e $B = \{-2,-1,0,1,2\}$ e $R = \{ (x,y) \in A \times B \ / \ y = 2x \}$

   Completa:

   R =

   Conj. Part. = Conj. Cheg. =

   Dom (R) = Im (R) =

   Representa R no diagrama e no plano cartesiano

Reforçando ...

1. Para cada ítem, determina : os pares ordenados das relações
o domínio e a imagem
o diagrama

a) $A=\{1,2,3,4\}$ $B=\{2,3,4\}$ e $R_1=\{(x,y)\in A\times B \ / \ x>y\}$

b) $A=\{6,12,16,22,24\}$ $B=\{4,5,8\}$ e $R_2=\{(x,y)\in A\times B \ / \ x/y\in \mathbb{N}\}$

c) $A=\{1,3,4,5\}$ $B=\{0,2,3,4\}$ e $R_3=\{(x,y)\in A\times B \ / \ x+y=5\}$

2. Dado o conjunto $A=\{\text{Ana, Carla, Tais, Angela, Beatriz}\}$ determina a relação R de A em A definida por "...tem nome com menos letra que ..."

a) R =

b) Representa R num diagrama

c) Completa:

Conj.Part. = Conj. Cheg. =

Dom (R) = IM (R) =

Lei da relação :

3. Seja $B=\{1,2,3,5,8,9,10,11,12\}$

a) Determina o conjunto $R=\{(x,y)\in B\times B \ / y=3x\}$

$R=\{(1,3),(3,9)\}$

b) Faze um diagrama de R

c) Faze o gráfico caresiano de R

d) Determina o domínio e a imagem de R

4. Sejam os conjuntos $A=\{1,3,4\}$ e $B=\{0,2,4,6,8\}$ e a relação $R=\{(x,y)\in A\times B \ / y \text{ é o dobro de } x\}$

Assinala as afirmações corretas:

a) ( ) $(3,6)\in A\times B$
b) ( ) Em (3,6) o segundo elemento é o dobro do primeiro.
c) ( ) $(3,6)\in R$
d) ( ) $(1,4)\in A\times B$
e) ( ) Em (1,4) o segundo elemento é o dobro do primeiro.
f) ( ) $(1,4)\notin R$
g) ( ) $(4,2)\in A\times B$
h) ( ) $(4,2)\in R$
i) ( ) $(1,2)\in R$
j) ( ) $R=\{(1,2),(3,6),(4,8)\}$
l) ( ) $R\subset A\times B$
m) ( ) $R=\{(x,y)/ \ y=2x\}$
n) ( ) R não é relação de A em B
o) ( ) Na relação R, cada elemento $x\in A$ foi associado ao elemento $y\in B$, que é o dobro de x

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1. Dados $A = \{-2,-1,0,1\}$ e $B = \{-1,0,1,2,3,4\}$, determina as relações de A em B :

   a) $R_1 = \{(x,y) \in A \times B \ / \ y = x + 1\}$

   b) $R_2 = \{(x,y) \in A \times B \ / \ y = x - 2\}$

   c) $R_3 = (x,y) \in A \times B \ / \ y = x^2 \}$

- Representa as relações R_1 , R_2 , R_3 no gráfico cartesiano e no diagrama.
- Completa o quadro:

	Conj.Part.	Conj.Cheg.	Dom.	Imagem	Lei
R_1					
R_2					
R_3					

2. Dado $A = \{1,2,4,6,8\}$,determina as relações e representa-as em diagrama.

   a) $R_1 = \{(x,y) \in A \times A \ / \ y = x + 2\}$

   b) $R_2 = \{(x,y) \in A \times A \ / \ y = x^0\}$

3. Determina Domínio e Imagem de cada relação do exercício 2.

4. Determina a lei que define cada relação sabendo que foram definidas em $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

   $(0,0)$

   $y = 2x$ a) $R_1 = \{(1,2) , (3,6) , (4,8) , (2,4) , (5,10)\}$

   $y = x - 2$ b) $R_2 = \{(5,3) , (6,4) , (8,6) , (10,8) , (4,2) , (3,1) , (2,0) (9,7) , (7,5)\}$

   $y = x^2$ c) $R_3 = \{(0,0) , (1,1) , (2,4) , (3,9)\}$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

① Dados os conjuntos abaixo determina os produtos cartesianos indicados.

$A = \{0,5\}$, $B = \{1,3,5\}$ $C = \{-1,1\}$ $D = \{4\}$

a) $A \times B =$

b) $C \times B =$

c) $B \times D =$

② Dados os conjuntos: $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ e $B = \{4,6,8,10,12\}$

a) Determina as relações:

$R = \{(x,y) \in A \times B \,/\, y = 3x\}$

$S = \{(x,y) \in A \times B \,/\, y = 3x+2\}$

$T = \{(x,y) \in B \times B \,/\, y = x-2\}$

$U = \{(x,y) \in A \times A \,/\, y = 2x-1\}$

$V = \{(x,y) \in B \times A \,/\, y = x-3\}$

b) Determina o domínio e a imagem de cada relação acima.

c) Representa R e S no diagrama de flechas

d) Representa T, U e V no gráfico cartesiano

③ Dados: $A = \{0,4,8,10,12\}$ e $B = \{0,1,2,3,4,5\}$ e a relação $R = \{(x,y) \in A \times B \,/\, y = \frac{x}{4}\}$ determina:

$R =$ conj. Partida: conj. chegada:

Dom (R) = Im (R) =

④ Determine a lei que define cada relação abaixo, sabendo que foram definidas em $A = \{-1,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

a) $R_1 = \{(2,-1), (3,0), (4,1), (5,2), (6,3), (7,4), (8,5), (9,6), (10,7)\}$ $y = x-3$

b) $R_2 = \{(-1,1), (0,2), (1,3), (2,4), (3,5), (4,6), (5,7), (6,8), (7,9), (8,10)\}$ $y = x+2$

c) $R_3 = \{(-1,3), (0,4), (1,5), (2,6), (3,7), (4,8), (5,9), (6,10)\}$ $y = x+4$

d) $R_4 = \{(0,0), (2,1), (4,2), (6,3), (8,4), (10,5)\}$ $y = \frac{x}{2}$

e) $R_5 = \{(0,0), (1,3), (2,6), (3,9)\}$ $y = 3 \cdot x$

f) $R_6 = \{(0,0), (3,1), (6,2), (9,3)\}$ $y = \frac{x}{3}$

PROPRIEDADES DAS RELAÇÕES

Seja A o conjunto dos alunos do IE e as leis

... tem o mesmo nome que ...

... é mais velha que ...

... é mãe de ...

... mora na mesma rua que ...

... é da mesma turma que ...

... é mais alto ou da mesma altura que ...

... é professor de ...

ANALISAR SE:

a) todo elemento é imagem de si mesmo.

b) a é imagem de b então b é imagem de a.

c) a é imagem de b e b é imagem de c, então a é imagem de c.

DEFINIR:

a) RELAÇÃO REFLEXIVA

Uma relação R de A em A é reflexiva se e somente se para $x \in A$, $(x, x) \in R$.

b) RELAÇÃO SIMÉTRICA

Uma relação R de A em A é simétrica se, e somente se, para $x, y \in A$, se $(x, y) \in R$ então $(y, x) \in R$

c) RELAÇÃO ANTISIMÉTRICA

Uma relação R de A em A é anti-simétrica se e somente se, para $x, y \in A$, se $(x, y) \in R$ então $(y, x) \notin R$

d) RELAÇÃO TRANSITIVA

Uma relação R de A em A é transitiva se e somente se, para $x, y, z \in A$, se $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$ então $(x, z) \in R$.

EXEMPLOS

Fazer o diagrama e analisar as propriedades

1) $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$R = \{(x, y) \in A^2 \,/\, y = x\}$

2) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 12, 15, 18\}$

$R = \{(x, y) \in A^2 \,/\, x$ é múltiplo de $y\}$

3) $A = \{-1, 0, 1\}$

$R = \{(x, y) \in A^2 \,/\, x \geq y\}$

4) $P = \{2, 10, 4, 9, 15\}$

$R_1 = \{(x, y) \in P^2 \,/\, x$ e y são primos entre si$\}$

R_2 = x tem o mesmo resto que y na divisão por 5

5) $A = \{3, 5, 6, 7\}$

$R_1 = \{(x, y) \in A^2 \,/\, x$ é divisor de $y\}$

$S = \{(x, y) \in A^2 \,/\, x \leq y\}$

$T = \{(x, y) \in A^2 \,/\, y = 2x - 3\}$

6) A = {Ana, Anelise, Camila, Carolina, Cássia, Júlia}

R: ... começa com a mesma letra que ...

7) $A = \{1, 3, 5, 7\}$

R: ... $x < y$ ...

8) $A = \{2, 4, 5, 10, 30\}$

R ... é múltiplo de ...

FUNÇÃO

Definição

Dados dois conjuntos, **A** e **B**, não-vazios, dizemos que a relação **f** de **A** em **B** é função se, e somente se, para qualquer **x** pertencente ao conjunto **A**, existe, em correspondência, um único **y** pertencente a **B**, tal que o par ordenado **(x, y)** pertença a **f**.

Simbolicamente:

$$f \text{ é função de } A \text{ em } B \Leftrightarrow (\forall x \in A,\ \exists!\ y \in B \mid (x, y) \in f)$$

Exemplo:

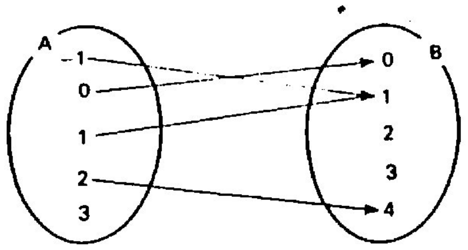
Dados os conjuntos $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, vamos analisar algumas relações estabelecidas a partir de $A \times B$ e determinar quais são funções e quais não são:

a) $R_1 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x^2\}$

Determinação de seus elementos:

$R_1 = \{(-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$

Construção do diagrama de setas:



Com exceção do 3, todo elemento pertencente ao conjunto **A** possui **um único** correspondente em **B**.

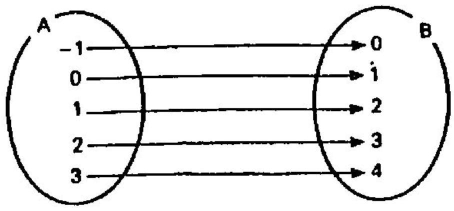
Então, R_1 *não é função*.

b) $R_2 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x + 1\}$

Determinação de seus elementos:

$R_2 = \{(-1, 0), (0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$

Construção do diagrama de setas:



Todo elemento pertencente ao conjunto **A** possui um único correspondente em **B** (sai uma única seta de cada elemento de **A**).

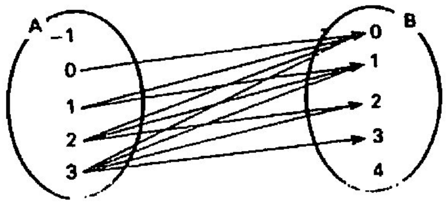
Então, R_2 *é função*.

c) $R_3 = \{(x, y) \in A \times B \mid y \leqslant x\}$

Determinação de seus elementos:

$R_3 = \{(0, 0), (1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$

Construção do diagrama de setas:



O elemento -1 de **A** não possui correspondente em **B** (de -1 não sai nenhuma seta); os elementos 1, 2 e 3 de **A** possuem mais de um correspondente em **B** (de 1, 2 e 3 parte mais de uma seta).

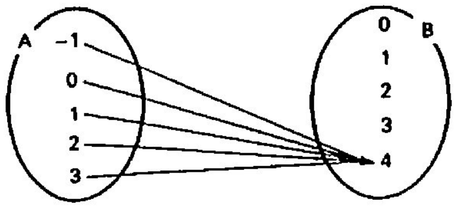
Então, R_3 *não é função*.

d) $R_4 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 4\}$

Determinação de seus elementos:

$R_4 = \{(-1, 4), (0, 4), (1, 4), (2, 4), (3, 4)\}$

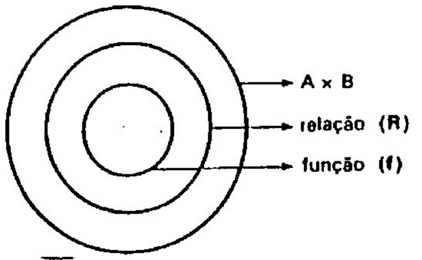
Construção do diagrama de setas:



Todo elemento pertencente ao conjunto **A** possui um único correspondente em **B** (de cada elemento de **A** parte uma única seta para **B**).

Então, R_4 *é função.*

Conclusão: Toda função é uma relação, mas nem toda relação é uma função:



$f \subset R \subset A \times B$

Notação de função

Podemos escrever uma função de vários modos:

1) $f : A \to B$
$\quad x \to y$

Exemplo:

$f : A \to B$
$\quad x \to y = 2x + 1$

2) $A \xrightarrow{f} B$
$\quad x \to y$

Exemplo:

$A \xrightarrow{f} B$
$\quad x \to y = -x + 3$

3) Sendo **x** a variável independente e **y** a variável dependente, temos:

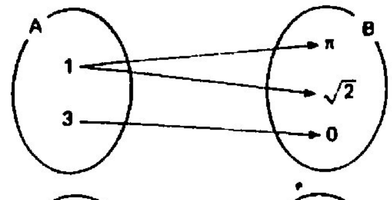
$y = f(x)$ (**y** é função de **x**)

Exemplo:

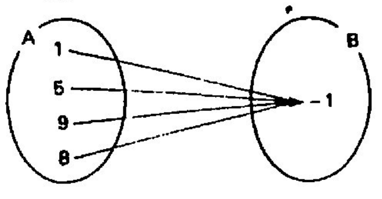
$y = 3x^2 + 4x$ ou $f(x) = 3x^2 + 4x$

Determinar quais dos diagramas abaixo representam funções:

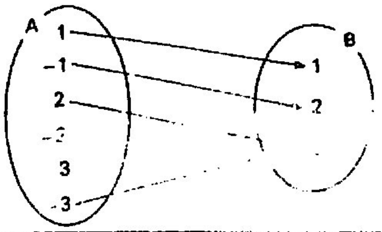
a)



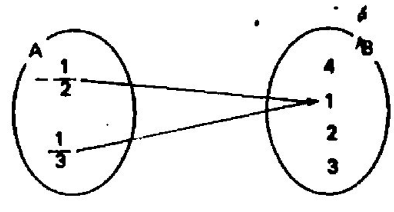
b)



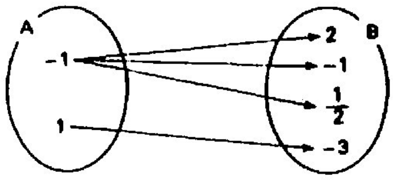
c)



d)



e)



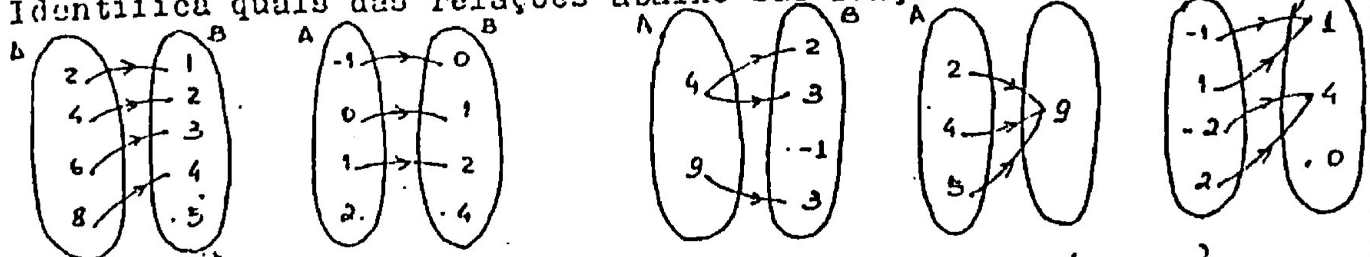
Solução:

a) Não é função, pois o elemento 1 de **A** possui dois correspondentes em **B** (partem duas setas do elemento 1).

b) É função, pois todo elemento de **A** possui um único correspondente em **B**.

TRABALHANDO COM FUNÇÕES

1. Identifica quais das relações abaixo são funções :



2. Verifica quais das relações são funções de A em B, com $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{1,2,3,4,5,6\}$

a) $\{(1,2)\ ,\ (2,3)\ ,\ (3,4)\}$

b) $\{(1,3)\ ,\ (2,4)\ ,\ (2,5)\ ,\ (3,6)\}$

c) $\{(2,3)\ ,\ (3,3)\}$

d) $\{(1,1)\ ,\ (2,4)\ ,\ (3,6)\}$

3. Determina as relações, representa-as através do diagrama e diga se são funções :

a) $A = \{-2,0,2\}$
$B = \{0,1,3,5\}$
$f: A \to B$
$x \mapsto y = x + 3$

b) $A = \{-1,0,1,2\}$
$B = \{-4,-2,0,2,4\}$
$f: A \to B$
$x \mapsto y = 4x$

4. Dados $B = \{0,1,2,3,4,5,6,9,12\}$ e $A = \{0,1,2,3,4\}$

a) determina por extensão as relações :

$R_1 = \{(x,y) \in A\times B \ /\ y = 3x\}$

$R_2 = \{(x,y) \in A\times B \ /\ y = x^2\}$

$R_3 = \{(x,y) \in A\times B \ /\ y = x+1\}$

b) identifica quais das relações são funções

5. Dados os conjuntos $A = \{-2,-1,0,1\}$ e $B = \{-4,-2,0,2\}$ e $C = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ determina os pares das funções abaixo :

$f_1 : A \to B \ /\ y = 2x$

$f_2 : A \to C \ /\ y = x + 2$

$f_3 : B \to C \ /\ y = x + 4$

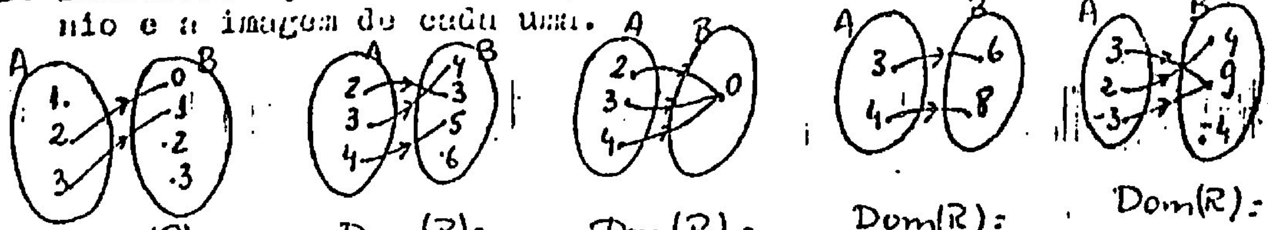
$f_4 : B \to A \ /\ y = x/2$

$f_5 : A \to C \ /\ y = x^2 + 1$

$f_6 : B \to C \ /\ y = 6$

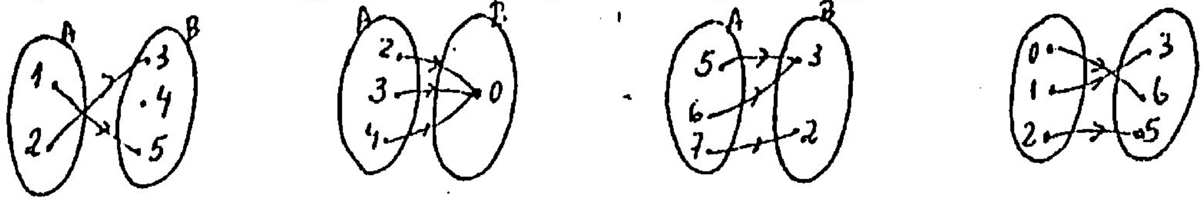
Reforçando ...

1. Identifica quais das relações são funções e determina o domínio e a imagem de cada uma.



Dom(R) = Dom(R)= Dom(R) = Dom(R): Dom(R):
Im(R) = Im(R)= Im(R) : Im(R): Im(R):

2. Observa os diagramas e completa o que é pedido :



f(1) = f(2) = f(5) = f(0) =

f(2) = f(4) = f(6) = f(2) =

3. Seja f uma relação de $A = \{2,3,4,5\}$ em $B = \{1,2,3,4,5,6\}$ definida por $y = x - 1$:

a) faça o diagrama de f
b) diga se f é uma função e justifica tua resposta.

4. Seja f uma relação de $A = \{-4,-3,-2,-1,0\}$ em $B = \{-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$ definida por $y = 2x + 5$

a) faça o diagrama de f
b) diga se f é uma função ou não e justifica tua resposta.

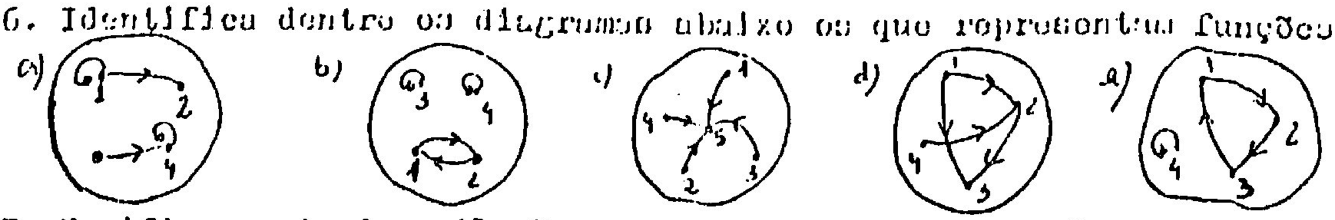
5. Dada a função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 4x + 3$ calcula :

a) $f(0) =$

b) $f(1) =$

c) $f(-2) =$

6. Identifica dentre os diagramas abaixo os que representam funções:



7. Verifica quais das relações abaixo representam funções :

a) $R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \mid 2y - x = 6\}$

b) $R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y = x - 2\}$

c) $R_3 = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y + 2x = 7\}$

d) $R_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x\}$

e) $R_5 = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y = x\}$