

SECRETARIA DE EDUCAÇÃO E CULTURA DO ESTADO DO RIO GRANDE DO SUL

CENTRO DE PESQUISAS E ORIENTAÇÃO EDUCACIONAIS

DIVISÃO DE ORIENTAÇÃO - SERVIÇO DE ENSINO

EQUIPE DE MATEMÁTICA

CURSO DE MATEMÁTICA



O ESTRANHO MUNDO DA TOPOLOGIA

O que é Topologia?

Você nunca ouviu falar numa fôlha de papel com um só lado? Por que os matemáticos dizem que uma rósca e um pote de flôres são mais parecidos do que uma rósca e uma ^{castanha} castanha? Quando um triângulo é o mesmo que um círculo? É possível ~~treçar o lado esquerdo do sapato pelo lado direito, dando uma volta no espaço?~~

São os tipos de questões a que a Topologia responde. Isto não parece matemática, não é? Mas é, e é um dos mais novos e excitantes campos da matemática. Desde que fale de coisas que lhe são familiares, como o lado interno da luva ou a diferença entre o lado direito e o esquerdo do sapato, não lhe parecerá estranho. E a Topologia é tão cheia de impossibilidades, de ardis, de imprevistos, que seria interessante aprendê-la melhor.

Topologia é o ramo da matemática que decide o que é possível. Diz-nos se é possível ~~virar~~ virar uma câmara de pneus para fora. Você pode pensar que o problema é fácil. Os topologistas dizem que é possível, mas nenhum teve jamais habilidade para fazer isso com uma câmara real.

Em Topologia, nunca perguntamos: "Que comprimento?", "Que extensão?" ou "Que tamanho?" Em vez disso, perguntamos: "Onde?", "Entre o que?", "Dentro ou fora?". Um viajante numa estrada desconhecida, não perguntaria: "A que distância está Barchester?", se não conhecesse a direção e o sentido. A resposta: "A três milhas daqui" não lhe seria de muita ajuda, se houvesse vários caminhos. Mais ade

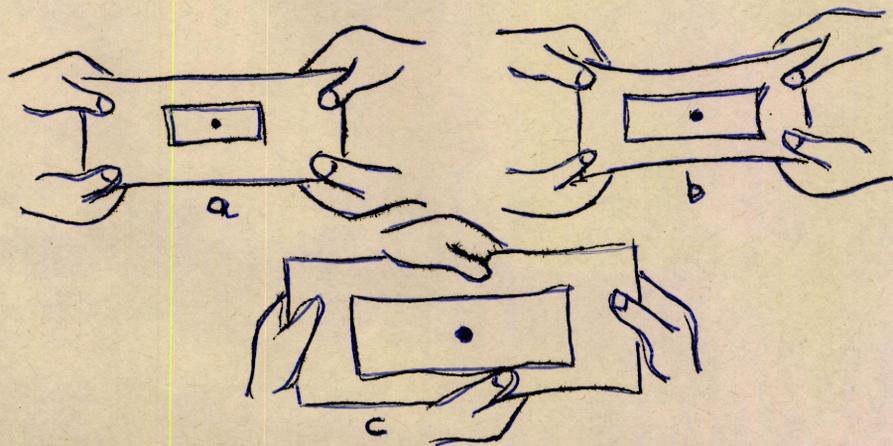
.....

.....

quando seria perguntar: "Que faço, para ir a Barchester?" Então, a resposta: "Siga esta estrada até encontrar uma encruzilhada; e dobre à esquerda" lhe diria como ir a Barchester. Esta resposta não soa como matemática, porque nada diz acerca de distância e não indica se a trajetória é reta ou curva. É a espécie de resposta que a Topologia dá para as questões.

TOPOLOGIA E GEOMETRIA

A Topologia, algumas vêzes, como a Geometria, trata com linhas, pontos e figuras. Mas as figuras são diferentes das da Geometria, porque lhes é permitido variar em tamanho e forma. Alguns chamam, por isso, à Topologia "tira de borracha geométrica". Esta Topologia mais interessada na posição que no tamanho ou forma. Trata com as propriedades de posição que não são afetadas pelas variações de tamanho e forma. Suponhamos, por exemplo, que você desenhe um quadrado com um ponto no interior sobre uma tira de borracha, não importa como você estire a fita de borracha. O ponto estará sempre no interior do quadrado. É, assim, a Topologia, o estudo das propriedades geométricas que permanecem as mesmas a despeito do alongamento ou ~~do~~ da curvatura.



.....
.....

.....
.....

A distância não tem sentido, em Topologia. Dois pontos, à distância de uma polegada, podem ser facilmente separados, por um estirão a duas polegadas de distância. Do mesmo modo, e tamanho de um ângulo é sem sentido, porque podemos esticar tanto a tira de borracha, que um ângulo de 15 graus se torne num ângulo de 35 graus. Mesmo linhas retas não tem sentido, em Topologia, porque a reta A B pode se tornar uma linha curva pela ^{distensão} (~~distorção~~) da fita.

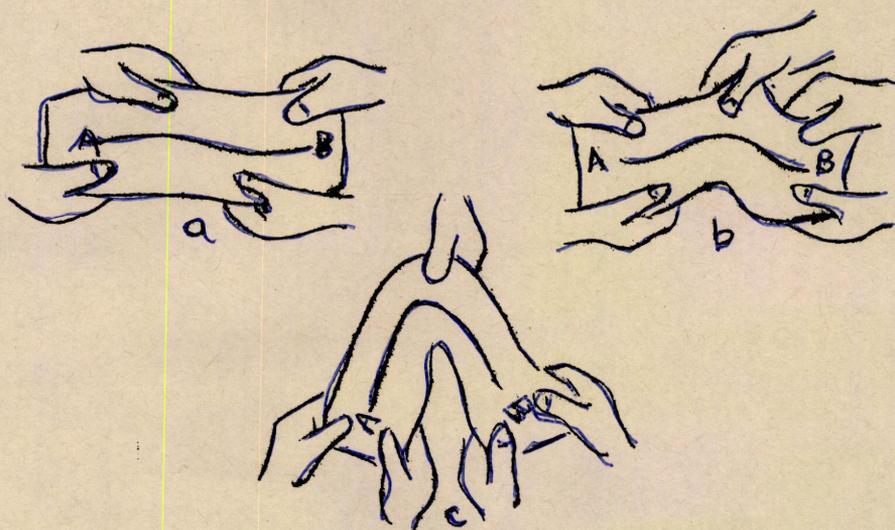


figura 3

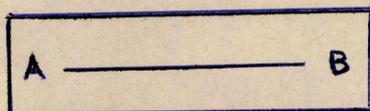


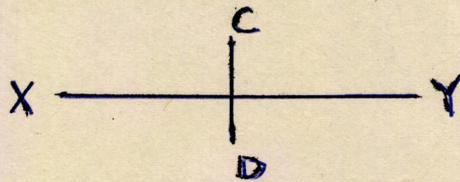
figura 2

A linha reta não somente se torna uma linha curva, mas varia também em comprimento. Pensamos, geralmente, numa chave, como um objeto duro e rígido. Conserva sua forma ajustada à fechadura, não importa quanto nela tenha sido movida. Quando um ^{avião} aeroplano decola e voa longe, parece tornar-se menor. Sabemos, entretanto, que êle permanece com o mesmo tamanho, não importa onde esteja. A Geometria Euclidiana faz o estudo dos objetos que têm sempre o mesmo tamanho. A Topologia é o estudo das coisas que variam em tamanho e forma, quan-

.....

.....
.....
do movidas.

Podemos imaginar uma linha como sendo um pedaço de barbante. Se há um ponto sôbre a linha, como um nó sôbre o barbante, deve permanecer na linha, mesmo que imaginemos esta linha dobrada, alongada ou curvada, por muitos meios. Dizemos também que a linha é contínua, nela não há furos. Se uma linha atravessa outra, passa através de um ponto dessa linha. Isto significa, por exemplo que, se desenhamos uma linha C D através de uma linha X Y como mostra a figura, a linha C D passa através de um ponto na linha X Y.



Variam tantas das propriedades das linhas e figuras nesta tira de borracha geométrica que podemos pensar nenhuma permanecer a mesma. Isto não é verdade. Veja a linha A B na figura 2, novamente. Não importa como estiremos ou curvemos a tira, a trajetória de A para B permanece uma trajetória de A para B, a qual não atravessa a si própria. A linha ou trajetória pode ser curvada ou alongada mesmo mais que na figura 3. Permanece, entretanto, uma linha com trajetória de A para B. Em Topologia, uma trajetória ou linha como A B é chamada arco AB.

COMO FIGURAS GEOMÉTRICAS VARIAM EM TOPOLOGIA

O que dissemos a cerca de simples linhas, como A B, também se aplica para linhas que formam figuras geométricas, tais como círculos ou triângulos. Vejamos o que acontece a um círculo sôbre uma tira de borracha. Pela distensão da borracha, o círculo pode va-

.....
.....

.....
.....
riar, como as figuras seguintes

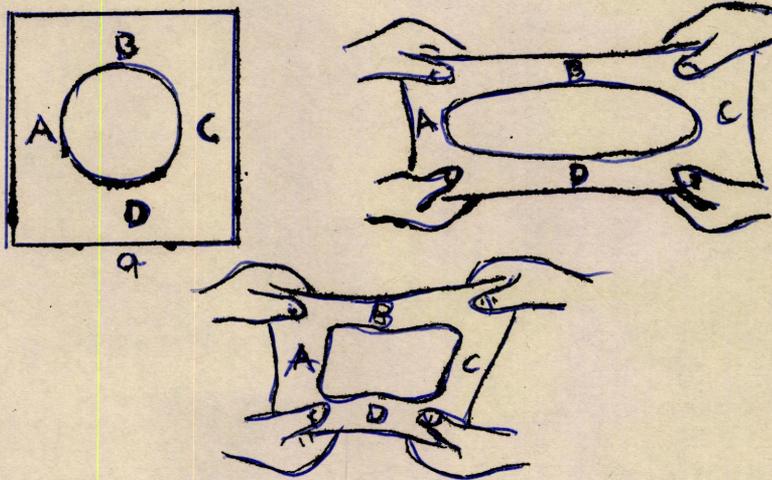


figura 5

Podemos ver que um círculo varia em grande proporção em forma e tamanho. Mas, não importa como distendamos a tira, a figura permanece numa trajetória ABCDA. Podemos também ver que, não importa onde comece essa trajetória, retornamos ao ponto de partida, sem atravessá-la. Se iniciamos em C, passamos por BAD e retornamos a C. Em topologia, tôdas estas figuras têm o mesmo nome. Cada uma é chamada uma curva simplesmente fechada ou circuito fechado e é construída sôbre dois arcos ABC e ADC os quais têm somente os pontos A e C em comum.

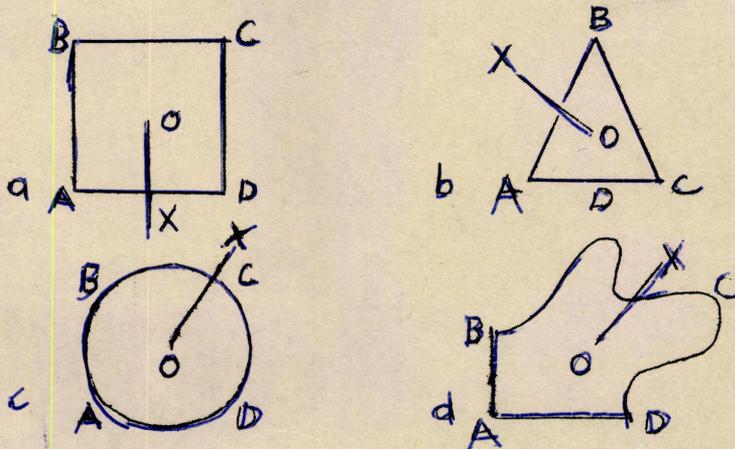


figura 6

.....
.....

.....
.....

A Topologia diz que estas figuras são tôdas simples curvas fechadas. Cada uma é feita sôbre dois arcos ABC e ADC não faz qualquer diferença, se os arcos são retos ou curvos.

Em cada ilustração acima, há um ponto O, no interior da curva fechada e um ponto X, fora dela. A linha OX atravessa um arco da curva fechada. Não importa como estas figuras possam ser variadas por distenção, O X passará sempre através de um arco da curva. A curva fechada ABCD não tem furos por onde passe O X.

Esta idéia de não haver furos numa linha parece simples, mas é uma idéia muito importante. Vimos que a idéia de não haver furos é chamada continuidade. Atualmente ninguém sabe se uma linha tem furos ou não. Mas parece razoável supor que não há furo numa linha.

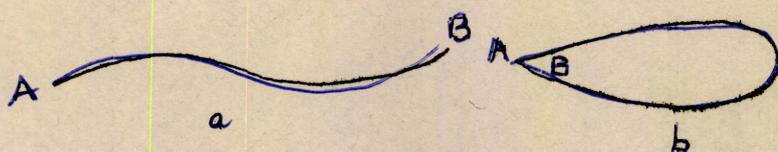
Dizemos que estas curvas fechadas dividem a tira em duas partes, uma interior e uma exterior. Você não pode ir do interior para o exterior, sem atravessar a curva. Esta verdade é segura, não importa como você varia a forma. Desde que você sempre atravesse a linha, indo de fora para dentro, não importa quanto você distorça a figura. Chamamos a esta travessia uma situação invariante. Em Topologia, qualquer situação que permanece a mesma, sob distorção, é chamada uma invariante. Quando distorcemos uma figura, por exemplo, uma linha reta esticada, numa linha curva ou um quadrado num círculo, fazemos uma variação chamada variação topológica ou uma transformação Topológica. Essas transformações mudam o tamanho ou a forma da figura mas não formam uma nova figura topológica. Se cortamos, rasgamos ou dobramos uma linha ou superfície, mudamos essa linha ou superfície e temos, assim, uma nova figura.

Uma transformação Topológica é feita sem cortar, rasgar, dobrar ou perfurar.

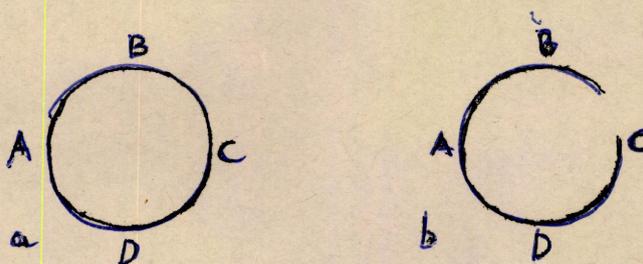
No círculo A B C D, outra propriedade que não varia, ou

.....

.....
.....
é invariante, é a ordem dos pontos A B C D. O que era invariante em relação à linha A B? Não importa quanto a estiremos, ela permanece uma trajetória de A para B, sem atravessar-se a si mesma. Vimos que, em Topologia, um círculo pode transformar-se numa eclipse ou num quadrado e uma linha reta pode transformar-se numa linha curva. Mas, quando juntamos os pontos A e B da linha AB, como na figura abaixo, temos uma nova figura, a curva fechada



De forma similar, quando cortamos o arco de um círculo, como na figura abaixo, mudamos a curva fechada numa linha.



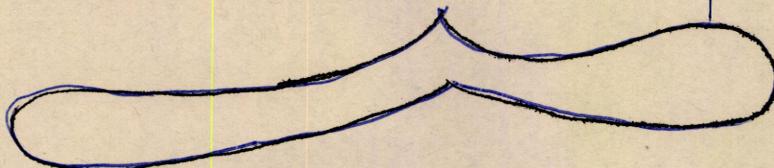
Essas mudanças não são transformações. São formadas novas figuras topológicas.

Em Geometria ^{Euclidiana} (tradicional) estudam-se as propriedades de tamanho, forma, área e grandeza angular. (Em geometria ^{Euclidiana} tradicional) dizem-se congruentes as figuras que, postas uma sobre outra da mesma forma e tamanho, revelam correspondência de tôdas as partes. Transformações topológicas são figuras que se dizem equivalentes. Em Topologia, o círculo e o quadrado são equivalentes, não importa o quanto ~~difiram~~ difiram em tamanho. Ambos têm um interior e um exterior. Para ir do interior para o exterior, devemos atravessar uma linha. Sombreado o

.....
.....
interior da figura abaixo, vemos, facilmente, como sua superfície se divide em duas regiões.

Tradução dos primeiros tópicos do livro de:

JOHNSON, Donovan A. e GLENN, Willian - Topology - The Rubber - Sheet Geometry - Ed. John Murray - London, 1964 - 40 pgs.



Traduzido Pela Professora

ZILÁ MARIA GUEDES PAIN

Revisado pelas Professôra

LEDA SPÉRB LOPES

e

NARA SANTOS

ND.