Adyr

ESTADO DO RIO GRANDE DO SUL
SECRETARIA DE ESTADO DOS NEGÓCIOS DA EDUCAÇÃO E CULTURA
CENTRO DE PESQUISAS E ORIENTAÇÃO EDUCACIONAIS
E DE EXECUÇÃO ESPECIALIZADA
DIVISÃO DE ORIENTAÇÃO - SERVIÇO DE ENSINO
EQUIPE DE MATEMÁTICA - ENCONTRO DE MATEMÁTICA - 1969.

Extraído do: CALAME, André - Matemática Moderna - 1 - Editôra Polígono - São Paulo - Brasil 1970.

CAPÍTULO III

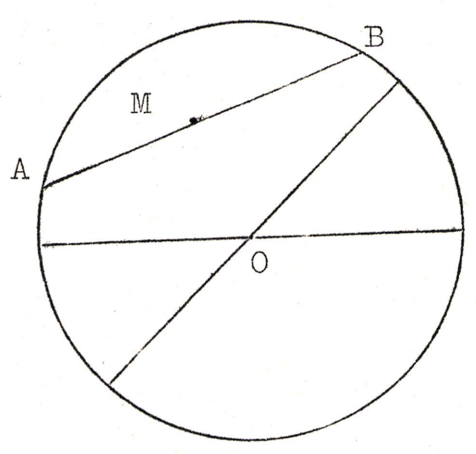
APLICAÇÕES

3.1. Aplicações de um conjunto E num conjunto F

3.11. Consideremos o conjunto E dos círculos do plano e o conjunto $F = \mathbb{R}$ dos números reais. A todo círculo c, $c \in E$, corresponde um único número real r, o raio do círculo, $r \in \mathbb{R}$.
Cada círculo de E admite por imagem em $\mathbb{R}$ um único número real. Diz-se que esta correspondência é uma aplicação de E em $\mathbb{R}$.

3.12. A todo número inteiro x do conjunto $\mathbb{Z}$ dos inteiros, façamos corresponder seu quadrado y, $y \in Z$.

$$\begin{array}{ccccccccccc} x & \ldots & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ y & \ldots & 16 & 9 & 4 & 1 & 0 & 1 & 4 & 9 & \ldots \end{array}$$



3.I - fig. I

Cada inteiro x de $\mathbb{Z}$ possue uma única imagem y, $y = x^2$, em $\mathbb{Z}$. Esta correspondência é uma aplicação de Z em Z. Pode ser considerada como uma relação particular em Z. Os pares ordenados $(x; x^2)$ de $Z \times Z$ formam um subconjunto que é o gráfico da relação.

3.13. Num plano, desenhemos um círculo. A tôda corda AB, façamos corresponder seu ponto médio M. Seja E o conjunto das cordas do círculo e seja F o conjunto dos pontos do plano. A todo elemento de E, portanto, a tôda corda, corresponde um único elemento de F, o ponto médio da corda. É uma aplicação de E em F.

3.14. Sejam um conjunto M e um subconjunto $A \subset M$. A todo subconjunto X de M, façamos corresponder o único subconjunto $X \cap A$. Obtemos uma aplicação do conjunto P(M) em si mesmo. A tôda parte $X \in P(M)$ corresponde uma única parte $X \cap A$ de P(M).

3.15. Definição. Dados dois conjuntos E e F, chama-se aplicação de E em F uma correspondência f que associa a cada elemento x de E um único elemento y de F.

E é chamado conjunto de partida da aplicação f.

F é chamado conjunto de chegada da aplicação f.

Para designar a aplicação f de E em F, escreve-se

$$f: E \longmapsto F$$

ou

$$E \overset{f}{\longmapsto} F.$$

Para indicar que o elemento $x \in E$ tem como imagem o elemento $y \in F$, escreve-se

$$f: x \longmapsto y$$

ou

$$x \overset{f}{\longmapsto} y$$

ou ainda

$$y = f(x).$$

Para caracterizar a aplicação f de E em F, pode-se escrever:

$$\forall x,\ x \in E, \exists^* y,\ y \in F \text{ tal que } y = f(x).$$

Tradução: Para todo elemento x de E, existe um único elemento y de F tal que $y = f(x)$.

Observação: Distinguimos os símbolos $\exists$ e $\exists^*$.

$\exists y$ significa: existe pelo menos um y.

$\exists^* y$ significa: existe um único y.

Diz-se também que f é uma função definida sôbre E, com valores em F. Designamos por f(E) o conjunto das imagens. É um subconjunto de F.

No exemplo 3.11 $f(E) = R^+ \cup 0$

No exemplo 3.12 $f(Z) = \{0, 1, 4, 9, 16, \ldots\}$

No exemplo 3.13 f(E) é o conjunto dos pontos internos ao círculo dado.

No exemplo 3.14 $f\,[P(M)] = P(A)$.

Observação: A imagem de um elemento é um elemento; a imagem de um conjunto é um conjunto.

$$f: x \longmapsto y = f(x)$$
$$f: \{x\} \longmapsto f(\{x\}) = \{y;\ y = f(x)\} = \{f(x)\}$$
$$f: E \longmapsto f(E) = \{y;\ y \in F \text{ e } y = f(x)\}$$
$$f: \emptyset \longmapsto \emptyset.$$

EXERCÍCIOS

1. Consideremos as seguintes aplicações de Q em Q:

$$f: x \longmapsto y = 3x - 7$$
$$g: x \longmapsto y = 5x + 2$$
$$s: x \longmapsto y = 3(x + 1)$$
$$t: x \longmapsto y = 3(x - 1) + 6$$
$$u: x \longmapsto y = 3x + 2.$$

Para cada aplicação, qual é a imagem de 0,08 e a imagem de $\frac{3}{4}$?
Existem elementos que têm como imagem $\frac{2}{3}$?
Existem elementos que têm a mesma imagem por f e por g? por x e t? por s e u? etc.

2. A correspondência

$$x \longmapsto \frac{x^2.}{x + 2}$$

é uma aplicação de R^+ em R^+ ; mas não é uma aplicação de Z em R. Por quê?

4.
$$f: x \longmapsto \frac{x}{x^2 - 2x}$$

é uma aplicação de Q em Q; mas não é uma aplicação de R em R. Por quê?

5. Consideremos as seguintes aplicações:

$$f: x \longmapsto x^2$$
$$g: x \longmapsto \frac{1}{x}$$
$$h: x \longmapsto \frac{x^2}{x-1}$$
$$t: x \longmapsto 1-x.$$

Determinar o conjunto de partida em Q. Existem elementos x que coincidem com sua imagem?

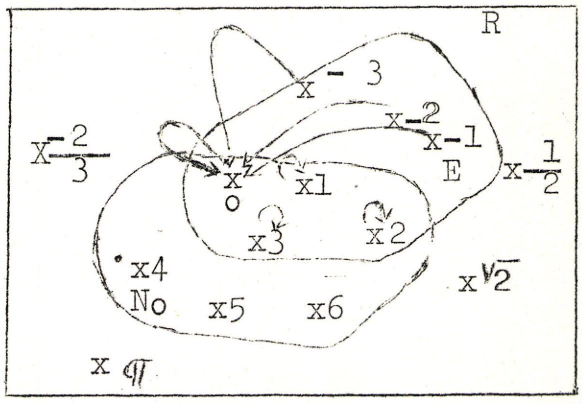
3.16. Uma aplicação f de E em F pode ser considerada como uma relação particular quando E e F são duas partes de um mesmo conjunto G. Os pares ordenados que satisfazem esta relação são os pares $(x;f(x))$ que formam um subconjunto S de $E \times F$, $E \times F \subseteq G \times G$.

Exemplo:

$$E = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} \subset R \qquad F = N. \subset R$$

$$f: x \longmapsto y = \frac{|x| + x}{2}$$

x	y
-3	$\frac{3 + (-3)}{2} = 0$
-2	$\frac{2 + (-2)}{2} = 0$
-1	$\frac{1 + (-1)}{2} = 0$
0	$\frac{0 + 0}{2} = 0$
1	$\frac{1 + 1}{2} = 1$
2	$\frac{2 + 2}{2} = 2$
3	$\frac{3 + 3}{2} = 3$



Nesta representação gráfica da aplicação, de cada elemento x, $x \in E$, parte uma única flecha.

Construamos uma tabela de dupla entrada de E x N. e assinalemos com uma cruz as casas que correspondem aos pares ordenados $(x;f(x))$.

5							
4							
3							x
2						x	
1					x		
0	x	x	x	x			
N. / E	-3	-2	-1	0	1	2	3

Visto que todo elemento x possui uma única imagem f(x), cada coluna da tabela contém uma e sòmente uma cruz.

3.17. Tôda aplicação f de um conjunto E num conjunto F determina em E uma relação de equivalência. Dois elementos x_1 e x_2 de E são equivalentes se têm a mesma imagem em F.

Exemplo: (3.16).

$$E = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} \qquad F = N.$$

$$f: x \longmapsto y = \frac{\lfloor x \rfloor + x}{2}$$

Os elementos de E estão repartidos em quatro classes de equivalência

$$
\begin{array}{llll}
C_1 = \{-3, -2, -1, 0\} & & f(C_1) = \{0\} \\
C_2 = \{1\} & & f(C_2) = \{1\} \\
C_3 = \{2\} & & f(C_3) = \{2\} \\
C_4 = \{2\} & & f(C_4) = \{3\}.
\end{array}
$$

Na tabela de E x N., aos elementos equivalentes de E correspondem cruzes situadas sôbre a mesma linha.

No exemplo 3.11, a relação de equivalência induzida pela aplicação é a igualdade dos círculos.

No exemplo 3.12, dois inteiros opostos x e -x têm a mesma imagem x^2. A aplicação considerada induz em Z a relação de equivalência

$$x_1 \equiv x_2 \Longleftrightarrow |x_1| = |x_2| .$$

No exemplo 3.13, duas cordas distintas têm o mesmo ponto médio se elas passam pelo centro do círculo. Todos os diâmetros formam uma única classe de equivalência. Tôda corda que não fôr um diâmetro' determina uma classe de equivalência que compreende um único elemento.

No exemplo 3.14, duas partes X_1 e X_2 de P(M) têm a mesma imagem se

$$X_1 \cap A = X_2 \cap A.$$

É uma relação de equivalência em P(M). (2. ex.: 10.)

Consideremos o caso geral:

A igualdade das imagens por f no conjunto de chegada F implica a equivalência dos elementos de partida em E.
$x_1 \equiv x_2 \Longleftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$
(equivalência em E) (igualdade em F)

Tôda relação de equivalência pode ser obtida a partir de uma igualdade em um conjunto.

Na linguagem corrente, para definir uma relação de equivalência, utilizam-se os têrmos "igual", "mesmo" etc.

Mostremos que as três propriedades de uma relação de equivalência são satisfeitas:

a) A relação é reflexiva.

$$\forall x \qquad x \equiv x \text{ porque } f(x) = f(x).$$

b) A relação é simétrica.

$$x_1 \equiv x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$
$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(x_2) = f(x_1)$$
$$f(x_2) = f(x_1) \Rightarrow x_2 \equiv x_1$$

de onde

$$x_1 \equiv x_2 \Rightarrow x_2 \equiv x_1.$$

c) A relação é transitiva.

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \equiv x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \\ x_2 \equiv x_3 \Rightarrow f(x_2) = f(x_3) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x_1)=f(x_3) \Rightarrow x_1 \equiv x_3$$

de onde

$$\left.\begin{array}{c} x_1 \equiv x_2 \\ \text{e} \\ x_2 \equiv x_3 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 \equiv x_3.$$

EXERCÍCIOS

6. Seja $E = \{-1,0,1,2,3,4,5\}$ e a aplicação de E em Z definida por

$$f: x \longmapsto x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 8x - 15.$$

Quais são as classes de equivalência induzidas por f em E?

7. Seja P o conjunto dos polígonos convexos planos. A todo polígono façamos corresponder a soma

a) dos ângulos internos,

b) dos ângulos externos.

(Chama-se ângulo externo de dois lados consecutivos, o ângulo formado por um lado e o prolongamento do outro.)

Estudar estas aplicações de P em R^+. Quais são as classes de equivalência induzidas por estas aplicações?

8. Seja a aplicação f de $E = \{x;\ x \in Z,\ |x| \leqslant 5\}$ em Z definida por:

$$f: x \longmapsto y = x^4 - x^2 .$$

Achar as classes de equivalência determinadas por f em E.

9. Sejam as aplicações de Z em Z

$$f: x \longmapsto x^2 + 9$$
$$g: x \longmapsto (x + 3)^2$$
$$h: x \longmapsto x^2 + a^2,\ a \in Z,\ a \text{ dado.}$$

Determinar as classes de equivalência induzidas em Z por f, g e h.
Existem elementos x de E, tais que

$$f(x) = g(x)$$
$$g(x) = h(x)$$
$$h(x) = f(x)?$$

3.2. Sobrejeções

3.21. Definição. Chama-se sobrejeção ou aplicação sobrejetora, uma aplicação de um conjunto E em um conjunto F, tal que todo elemento y de F seja a imagem de pelo menos um elemento x de E.

$$\boxed{f \text{ é sobrejetora} \Longleftrightarrow f(E) = F}$$

Exemplos:

3.22. $E = \complement_{R}^{\,0} \qquad F = \{+1, -1\} \qquad f: x \longmapsto y = \dfrac{x}{|x|}$

$$x \text{ é positivo} \Longrightarrow |x| = x \Longrightarrow y = \frac{x}{x} = +1$$

$$x \text{ é negativo} \Longrightarrow |x| = -x \Longrightarrow y = \frac{x}{-x} = -1$$

f é uma aplicação sobrejetora do conjunto dos números reais não nulos em $F = \{+1, -1\}$. A aplicação f induz em E duas classes de equivalência R^+ e R^-.

3.23. A todo inteiro $x \in Z$, associa-se o resto positivo ou nulo $r(x)$ da divisão de x por 5.

+ 15		+ 16		+ 17		+ 18		+ 19	
+ 10		+ 11		+ 12		+ 13		+ 14	
+ 5	0	+ 6	+1	+ 7	+2	+ 8	+3	+ 9	+ 4
0		+ 1		+ 2		+ 3		+ 4	
- 5		- 4		- 3		- 2		- 1	
- 10		- 9		- 8		- 7		- 6	

Obtemos uma sobrejeção de Z sôbre $C = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
A relação de equivalência induzida em Z por esta aplicação é a seguinte

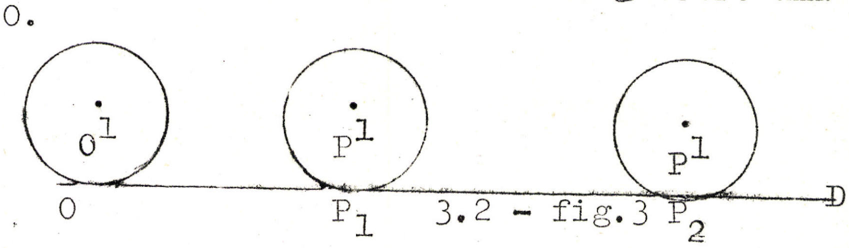
$$x_1 \equiv x_2 \Longleftrightarrow r(x_1) = r(x_2).$$

Ora, esta relação significa que $x_1 - x_2$ é um múltiplo de 5. Dito de outro modo, reencontramos, neste exemplo, a relação de congruência (mod 5).

$$r(x_1) = r(x_2) \Longleftrightarrow x_1 \equiv x_2 \pmod 5.$$

As classes de equivalência assim obtidas são também chamadas classes de restos (mod 5) ou classes residuais (mod. 5). (2.25.)

3.24. Façamos "rolar" um círculo de raio $\mathcal{E}$ sôbre uma semi-reta D de origem O.



3.2 - fig.3

A cada instante, um ponto P da semi-reta está em contato com o círculo, em um ponto P'. A aplicação

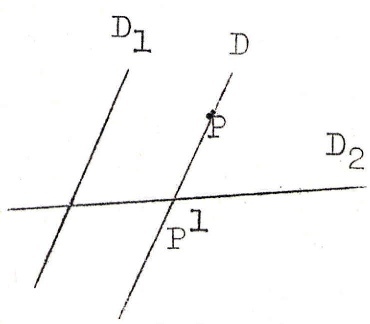
$$f: P \longmapsto P'$$

é sobrejetora, porque todo P'da circunferência é a imagem de um ponto e até mesmo de uma infinidade de pontos P_1, P_2,... da semi-reta.

Consideremos a relação de equivalência induzida por f no conjunto dos pontos da semi-reta D. Dois pontos P_1 e P_2 são equivalentes se sua distância fôr igual ao comprimento da circunferência ou a um de seus múltiplos

$$P_1 \equiv P_2 \Longleftrightarrow P_1 P_2 = n^\circ\ 2\pi\varrho, \qquad n \in N.$$

3.25. Sejam $E = \dot{\pi}$ o conjunto dos pontos do plano, D_1 e D_2 duas retas secantes dêste plano.



3.2 - fig. 4

A cada ponto $P \in \dot{\pi}$, façamos corresponder sua projeção P'sôbre D_2 paralelamente a D_1.

$$f: P \longmapsto P'$$

f é uma sobrejeção de $E = \dot{\pi}$ em $F = D_2$. As classes de equivalência induzidas por f em $\dot{\pi}$ são as pontilhadas D, paralelas a D_1.

Observação: Tôda aplicação de um conjunto E num conjunto F é uma sobrejeção de E em f(E).

3.3. INJEÇÕES

3.31. Definição. Seja uma aplicação f de E em F. Se cada elemento $y \in f(E)$ é a imagem de um único elemento $x \in E$, diz-se que a aplicação f é uma injeção ou uma aplicação injetora.

$$y \in f(E) \Longrightarrow \exists^* x,\ x \in E \text{ tal que } f(x) = y.$$

Numa injeção, a igualdade das imagens no conjunto de chagada F implica a igualdade dos elementos no conjunto de partida E. A equivalência induzida por uma injeção é a igualdade

$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2.$$

Sob forma contraposta, o enunciado se transforma em

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Uma aplicação é injetora se elementos diferentes sempre têm imagens diferentes (ver 3., fig. 11).

$$\boxed{f \text{ é injetora} \iff \begin{cases} f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \\ \text{ou} \\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \end{cases}}$$

Exemplos:

3.32. $E = F = N$ $\quad f: x \longmapsto y = 2x - 1$

A aplicação f é injetora, porque

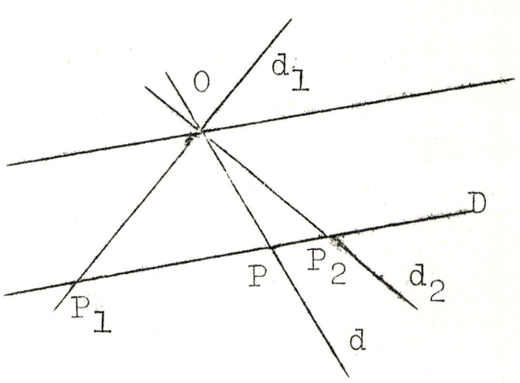
$$\begin{array}{c} f(x_1) = f(x_2) \\ \Downarrow \\ 2x_1 - 1 = 2x_2 - 1 \\ \Downarrow \\ 2x_1 = 2x_2 \\ \Downarrow \\ x_1 = x_2. \end{array}$$

3.33. $E = F = R^+$ $\quad f: x \longrightarrow y = \dfrac{3x}{x+1}$

A aplicação f é injetora, porque

$$\begin{array}{c} f(x_1) = f(x_2) \\ \Downarrow \\ \dfrac{3x_1}{x_1+1} = \dfrac{3x_2}{x_2+1} \\ \Downarrow \\ 3x_1\ (x_2+1) = 3x_2\ (x_1+1) \\ \Downarrow \\ 3x_1 = 3x_2 \\ \Downarrow \\ x_1 = x_2. \end{array}$$

3.34. No plano pontilhado $\dot{\mathcal{T}}$, consideremos uma pontilhada D e um ponto O, $O \notin D$. A todo ponto P, $P \in D$, associemos a reta OP. Temos uma aplicação f de D no conjunto $\overline{\mathcal{T}}$ das retas do plano. Esta aplicação é injetora, porque a dois pontos distintos P_1 e P_2 correspondem retas distintas d_1 e d_2. Ao contrário f não é sobrejetora. Em particular, a paralela a D, que passa por O, não é a imagem de nenhum ponto de D.



3.3 - fig. 5

3.4. BIJEÇÕES

3.41. Definição. Diz-se que uma aplicação f é uma bijeção ou uma aplicação bijetora se ela fôr, ao mesmo tempo, injetora e sobrejetora.
Se f é uma bijeção de E em F, cada elemento y de F é a imagem de um único elemento x de E. (3. fig. 11)

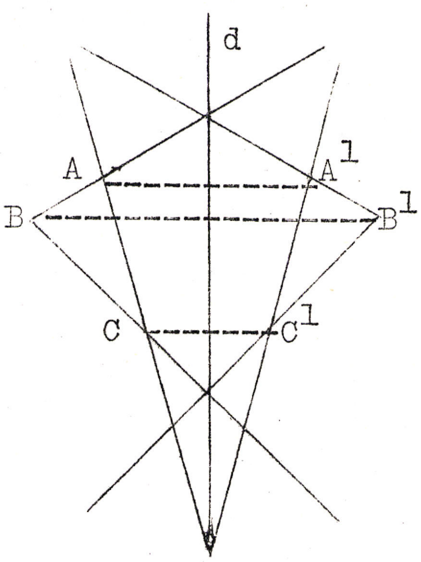
$$\boxed{f \text{ é bijetora} \Longleftrightarrow \forall y,\ y \in F,\ \exists^{*} x,\ x \in E \text{ tal que } y = f(x)}$$

Observação. Tôda aplicação injetora de E em F é uma bijeção de E em f(E). Isto é uma conseqüência da observação 3.25.

3.42. Seja E = F = Z   f: $x \longmapsto y = x = 4$

x	...	-2	-1	0	+1	+2	+3	+4	...
y	...	-6	-5	-4	-3	- 2	-1	0	...

A aplicação f é injetora e sobrejetora, porque todo elemento $y \in F = Z$ é a imagem do único elemento $x = y + 4$ de E = Z.



3.3 - fig.6

3.43. Uma simetria de eixo d determina uma bijeção do conjunto $\mathcal{P}$ dos pontos do plano sôbre si mesmo. Também é uma bijeção do conjunto $\overline{\mathcal{P}}$ das retas do plano sôbre si mesmo.

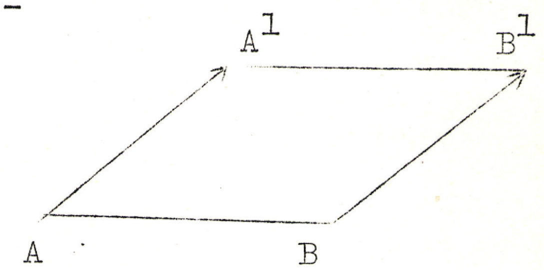
3.44. As rotações e as translações são bijeções de $\mathcal{P}$ sôbre si mesmo e de $\overline{\mathcal{P}}$ sôbre si mesmo.

3.45. As homotetias (dilatações ou reduções proporcionais) também são bijeções de $\mathring{\mathcal{P}}$ sôbre si mesmo e de $\overline{\mathcal{P}}$ sôbre si mesmo

3.46. Translações

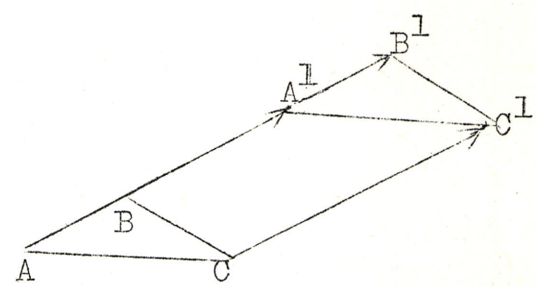
O papel das translações no prosseguimento dêste curso justifica um estudo mais pormenorizado desta bijeção de $\mathring{\mathcal{P}}$ em si mesmo.
A todo par ordenado (A; A') de pontos do plano, pode-se associar a translação $\tau(AA')$; esta translação transforma A em A'. Ela é completamente definida pelo par ordenado (A; A').
É cômodo representá-la por uma flecha de origem A e de extremidade A'. Para construir a imagem B' de um ponto qualquer B, basta traçar por B a paralela a AA' e por A' a paralela a AB. Estas duas retas se cortam no ponto B' (3.4 - fig. 7). A construção é impossível se B estiver sôbre a reta AA'. Neste caso, basta construir, de início, a imagem C' de um ponto C não situado sôbre AA' (3.4-.. fig. 8).

Utiliza-se aqui a régua para o traçado das retas, a régua e o esquadro para o traçado das paralelas.
O ângulo reto do esquadro não tem finalidade



3.4 -fig.7

nestas construções que não possuem caráter métrico. Um esquadro "afim", sem ângulo reto, servirá muito bom.
A aplicação σ que associa a todo par ordenado $(A; A')$ a translação $\tau(AA')$ é uma sobrejeção do conjunto-produto $\dot{\Pi} \times \dot{\Pi}$ no conjunto F das translações.

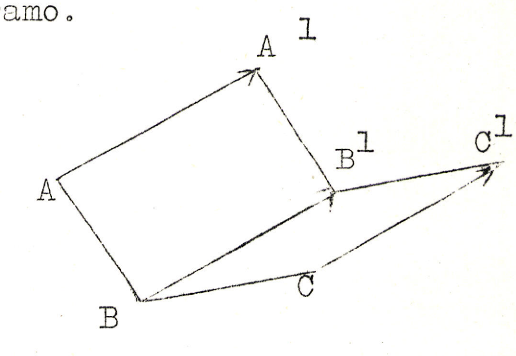


3.4 - fig.8

$$\sigma : \dot{\Pi} \times \dot{\Pi} \longmapsto F$$
$$\sigma : (A; A') \longmapsto \tau(AA').$$

A sobrejeção σ induz em $\dot{\Pi} \times \dot{\Pi}$ uma relação de equivalência. Dois pares ordenados $(A; A')$ e $(B; B')$ são equivalentes se determinam a mesma translação $\tau(AA') = \tau(BB')$. Neste caso, os pontos AA' BB' são os vértices de um paralelogramo.

Tôdas as flechas que correspondem à mesma translação formam uma classe de flechas equivalentes, no sentido do parágrafo 2.265



3.4 - fig. 9

3.47. Se f é uma bijeção de E em F tal que

$$f: x \longmapsto y$$

existe uma única bijeção de F em E tal que

$$y \longmapsto x.$$

Diz-se que esta aplicação é a aplicação inversa de f ou bijeção inversa de f; é indicada por $\overset{-1}{f}$.

Exemplo:

$$f: x \longmapsto y = \frac{x - 1}{x + 1}$$

é uma bijeção de $\complement_R\{-1\}$ em $\complement_R\{1\}$. Com efeito, tem-se

$$y = \frac{x - 1}{x + 1}$$

$$xy + y = x - 1$$

$$x(y - 1) = - y - 1$$

$$x = \frac{- y - 1}{y - 1}.$$

Todo elemento y, $y \neq 1$, é a imagem do único elemento

$$x = - \frac{y + 1}{y - 1}$$

$$f^{-1}: y \longrightarrow x = - \frac{y + 1}{y - 1}.$$

f^{-1} é a bijeção inversa de f. Ela aplica $\complement_R\{1\}$ em $\complement_R\{-1\}$.

3.5. IMAGEM RECÍPROCA

3.51. Definição. Seja f uma aplicação de E em F e seja B um subconjunto de F. Chama-se imagem recíproca de B, o conjunto A de todos os elementos de E cujas imagens por f pertencem a B.

Indica-se por $A = f_*^{-1}(B)$ a imagem recíproca de B. O asterísco chama a atenção para o fato de que a passagem de B a $f_*^{-1}(B)$ não é u-ma aplicação.

Note-se, em particular, que

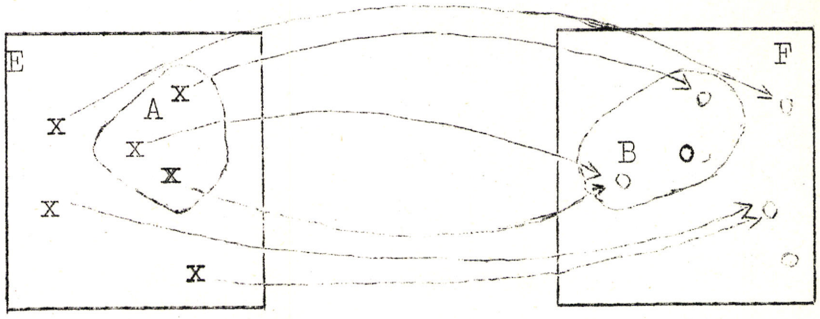
$$f_*^{-1}(\emptyset) = \emptyset \quad f_*^{-1}(F) = E$$

3.52. Retomemos o exemplo 3.16 (3.1 - fig. 2):

$$E = \{-3, -2, -1, 0, +1, +2, +3\} \quad F = N.$$

$$f: x \longmapsto y = \frac{x + |x|}{2}.$$

Procuremos as imagens recíprocas de alguns subconjuntos de N.



3.5-fig.IO

$$B = \{1,\ 4\} \Rightarrow \overset{-1}{f_*}(B) = \{+1\}$$
$$C = \{0\} \Rightarrow \overset{-1}{f_*}(C) = \{0,\ -1,\ -2,\ -3\}$$
$$D = \{0,\ 3\} \Rightarrow \overset{-1}{f_*}(D) = \{-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ +3\}$$
$$G = \{4,\ 5,\ 6\} \Rightarrow \overset{-1}{f_*}(G) = \emptyset$$

3.53. Seja a aplicação de R em R

$$f:\ x \longmapsto y = x^2.$$

Consideremos as imagens recíprocas de alguns subconjuntos de F=R.

$$B = \{4\} \Rightarrow \overset{-1}{f_*}(B) = \{+2,\ -2\}$$
$$C = \{0\} \Rightarrow \overset{-1}{f_*}(C) = \{0\}$$
$$D = \{2\} \Rightarrow \overset{-1}{f_*}(D) = \{+\sqrt{2},\ -\sqrt{2}\}$$
$$G = R^- \Rightarrow \overset{-1}{f_*}(R^-) = \emptyset$$
$$H = \{2,\ 3,\ 4\} \Rightarrow \overset{-1}{f_*}(H) = \{+\sqrt{2},\ -\sqrt{2},\ +\sqrt{3},\ -\sqrt{3},\ +2,\ -2\}.$$

Se restringirmos f à aplicação de $R^+ \cup 0$ sôbre si mesmo, f torna-se uma bijeção. Podemos, então, definir a bijeção inversa $\overset{-1}{f}$:

$$\overset{-1}{f}:\ y \longmapsto x \text{ tal que } x^2 = y.$$

Indica-se também esta bijeção inversa por

$$x = \sqrt{y} = y^{\frac{1}{2}}.$$

Sòmente neste caso, a imagem recíproca $\overset{-1}{f_*}(S)$ de um subconjunto S coincide com o conjunto das imagens $\overset{-1}{f}(S)$ de S pela bijeção inversa $\overset{-1}{f}$.

3.54. Assinalemos duas inclusões interessantes:

(1) $\overset{-1}{f_*}\left[f(A)\right] \supseteq A$

(2) $f\left[\overset{-1}{f_*}(B)\right] \subseteq B.$

A relação (1) é uma inclusão entre partes do conjunto de partida E, enquanto que a relação (2) é uma inclusão entre partes do conjunto de chegada F. Os exemplos que se segue, relativos à aplicação 3.16. ilustram o caso da inclusão no sentido estrito.

a) $A = \{-2;\ 0\} \subset E$

$f(A) = \{0\} = C \subset N.$ (ver 3.52)

$\overset{-1}{f_*}\left[f(A)\right] = \overset{-1}{f_*}(C) = \{0,\ -1,\ -2,\ -3\}$

de onde

$\overset{-1}{f_*}\left[f(A)\right] \supset A.$

b) $B = \{1,\ 4\} \subset N.$ (ver 3.52)

$\overset{-1}{f_*}(B) = \{+1\}$

$f\left[\overset{-1}{f_*}(B)\right] = \{1\}$

de onde

$f\left[\overset{-1}{f_*}(B)\right] \subset B.$

3.55. Seja f uma bijeção de E em F; a imagem recíproca de F é E (caso geral 3.51)

$$\overset{-1}{f_*}(F) = E.$$

Nesse caso, a imagem recíproca de todo subconjunto S de F coincide com a imagem de S pela bijeção inversa $\overset{-1}{f}$.

Exercícios

10. A todo elemento $x \in N.$, faz-se corresponder o resto $y \geqslant 0$ da divisão de x por 7. Determinar f(N). Quais são as classes de equivalência induzidas por f em N.?

11. Seja f a aplicação de $\complement_Q\{1\}$ em Q definida por

$$f: x \longmapsto \frac{x}{x-1}.$$

É uma sobrejeção? É uma injeção? Qual é a imagem de $\frac{5}{7}$? 0,8?-3,5? Que elemento tem por imagem 2,7? $\frac{1}{4}$?- $\frac{2}{3}$?

12. Seja uma reta D do plano e O um ponto fixo tal que $O \in D$. Considere-se a aplicação de D em $\mathring{\mathcal{P}}$:

$$f: P \longmapsto P' \text{ onde } P' \text{ é o ponto médio de } OP.$$

O que é f(D)?

f é uma injeção de D em $\mathring{\mathcal{P}}$?

13. Seja C um círculo e seja D um diâmetro dêste círculo. A todo ponto $P \in C$, façamos corresponder o pé P'da perpendicular traçada de P a D. Quais são as classes de equivalência determinadas por esta aplicação no conjunto C dos pontos do círculo?

14. Seja O um ponto fixo do plano. A tôda reta $d \in \mathcal{P}$, façamos corresponder a perpendicular d' traçada de O sôbre d. Esta aplicação é uma injeção de $\mathcal{P}$ em $\mathcal{P}$? É uma sobrejeção? Quais são as classes de equivalência induzidas por f em $\mathcal{P}$?

15. Dá-se uma translação $\tau(AA')$ pelos 2 pontos A e A'. Construir com a régua e o esquadro o transformado de um triângulo dado MNP.

16. Uma translação é determinada por duas retas secantes e suas imagens?

17. Tôda translação é uma bijeção de $\mathring{\mathcal{P}}$ em si mesmo. Descrever a bijeção inversa.

18. Representar por flechas:
    1. Duas translações de direções diferentes.
    2. Duas translações de mesma direção e sentidos contrários.
    3. Duas translações diferentes de mesma direção e mesmo sentido.

19. Descrever a bijeção inversa de uma simetria axial de $\mathring{\mathcal{P}}$ em si mesmo.

20. Existe uma rotação de centro O que coincide com a bijeção inversa?

21. Mostrar que as aplicações

$$e: x \longmapsto x$$
$$f: x \longmapsto -x$$
$$g: x \longmapsto \frac{1}{x}$$
$$h: x \longmapsto -\frac{1}{x}$$

são bijeções de $E = \left\{-2, -\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}, 1, 2\right\}$ em si mesmo, e,f,g e h são bijeções de $\complement_Q 0$ em si mesmo?

22. Estudar as seguintes aplicações de Z em Q:

$$f: x \longmapsto |x - 1| + |x + 2|$$
$$g: x \longmapsto \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor - |x - 3|$$
$$h: x \longmapsto \frac{\lfloor x^2 - 1 \rfloor}{2} + |x|.$$

23. Consideremos as seguintes aplicações de N em N:

$\varphi : n \longmapsto \varphi(n)$ = número de divisores de n

$\sigma : n \longmapsto \sigma(n)$ = soma dos divisores de n.

O que se pode dizer de n se $\varphi(n)$ é ímpar?

Determinar alguns números "perfeitos", isto é, números n tais que $\sigma(n) = 2n$.

24. Sejam $E = \{1, 2, 3, \ldots, 12\}$ e as aplicações

$f: x \longmapsto y$, onde y é o número de fatôres primos na decomposição de x

$$x = p_1^{a_1}\ p_2^{a_2} \ldots p_n^{a_n} \longmapsto y = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$

$g: x \longmapsto z$, onde z é o número de fatôres primos diferentes na decomposição de x

$$x = p_1^{a_1}\ p_2^{a_2} \ldots p_n^{a_n} \longmapsto z = n.$$

Estudar estas aplicações.

25. A cada número natural $n \in N$, faz-se corresponder o conjunto de seus fatôres primos.

Exemplo:
$$12 \longmapsto \{2, 3\}$$
$$75 \longmapsto \{3, 5\}$$

Estudar esta aplicação de N em P(P), onde P designa o conjunto dos números primos.

26. Seja a aplicação de Q em si mesmo definida por

$$f: x \longmapsto ax + b \quad a, b \in Q.$$

Mostrar que f é bijetora se, e sòmente se, $a \neq 0$. Em que condições f coincide com a bijeção inversa $\overset{-1}{f}$?

27. Seja a aplicação:

$$f: x \longmapsto \frac{ax + b}{cx + d} \quad a, b, c, d \in Q.$$

Em que condição f é bijeção? Precisar os conjuntos de partida e de chegada em Q.

É possível que f coincida com a bijeção inversa f^{-1}?

28. Sejam $E = \{a, b\}$ e $F = \{d, e, f\}$.

Quantas aplicações de E em F podemos definir?
Quantas aplicações de E sôbre F podemos definir?
Quantas injeções de E em F podemos definir?
Quantas bijeções de E em F podemos definir?

O mesmo problema para $E = \{a, b\}$ e $F = \{d, e\}$

$E = \{a, b, c\}$ e $F = \{d, e\}$.

29. Quantas bijeções de E em si mesmo podemos definir, se E compreende 2 elementos, 3 elementos, ... n elementos?

30. Mostrar que a aplicação

$$A \longmapsto \complement_E A$$

é uma bijeção de P(E) em si mesmo.

31. Em Z, consideremos os subconjuntos

$$A = \{-3, -2, -1, 0, 1\} \text{ e } B = \{-1, 0, 1, 2, 4\}$$

e a aplicação

$$f: x \longmapsto y = x^2.$$

Enumerar os elementos de

$$f(A),\ f(B),\ f(A \cap B),\ f(A \cup B),\ f(A) \cup f(B),\ f(A) \cap f(B).$$

32. Explicar por meio de esquemas e de exemplos as seguintes relações:

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cup f(B).$$

Que podemos dizer desta segunda relação se f fôr injetora?

33. Seja $E = \{-3, -1, 0, 2\}$ um conjunto ordenado pela relação $<$.

Mostrar que a aplicação

$$f: x \longmapsto x^2$$

não conserva a relação de ordem.

O que podemos dizer da aplicação

$$g: x \longmapsto -x?$$

34. Seja Z, ordenado pela relação $>$. Mostrar que a aplicação

$$f: x \longmapsto ax + b \quad a, b \in Z$$

conserva a relação de ordem se $a > 0$, isto é que

$$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

O que acontece se $a < 0$?

35. Seja f uma aplicação. Mostrar por meio de exemplos que

$$A \subset B \Rightarrow f(A) \subseteq f(B).$$

36. Seja f uma aplicação. Mostrar por meio de exemplos que

$$f(A) \subset f(B)$$

não acarreta necessàriamente

$$A \subset B.$$

Funções características

37. Chama-se função característica de um subconjunto A de E, uma aplicação de E em $\{0, 1\}$ definida por

$$f: x \in A \longmapsto f(x) = 1$$
$$x \notin A \longmapsto f(x) = 0.$$

Seja $N \subset Z$. Verificar que a aplicação f é uma função característica de N.

$$f: 0 \longmapsto 0$$
$$x \neq 0,\ x \longmapsto \frac{|x|}{2} + \frac{x}{2\,|x|}.$$

38. Seja f uma função característica do subconjunto A de E. Mostrar que

$$g(x) = 1 - f(x)$$

é uma função característica de $\complement_E A$.

39. Seja f uma função característica de $A \subset E$ e seja g uma função característica de $B \subset E$.
Mostrar que

$$h(x) = f(x) \cdot g(x)$$

é uma função característica de $A \cap B$.

40. Com as notações do exercício 39, mostrar que

$$s(x) = f(x) + g(x) - f(x) \cdot g(x)$$

é uma função característica de $A \cup B$.

41. Com as notações do exercício 39, mostrar que

$$t(x) = f(x) + g(x) - 2f(x) \cdot g(x)$$

é uma função característica da diferença simétrica $A \triangle B$. (1. ex.: 38)

42. Explicar as seguintes implicações (ver 3.53)

$$f \text{ injetora} \Rightarrow \overset{-1}{f_*}\left[f(A) \right] = A$$
$$f \text{ sobrejetora} \Rightarrow f\left[\overset{-1}{f_*}(B) \right] = B.$$

Considerar as recíprocas destas implicações.

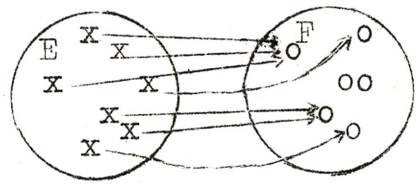
43. Seja $n \in N$ e seja f a aplicação de R em R:

$$f: x \longmapsto y = x^n.$$

Em que condição f é uma bijeção? Se f não fôr injetora, o que podemos dizer de f(R)?

Todo elemento x de E tem uma única imagem y em F

Aplicação de E em F

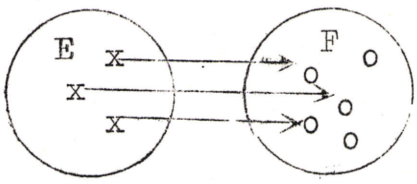


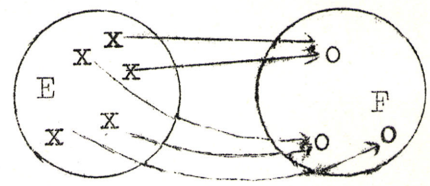
Injeção de E em F

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow y_1 \neq y_2$

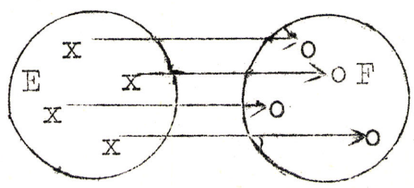
Sobrejeção de E em F

Todo elemento de F é imagem





Bijeção de E em F



É o estudo do conjunto de chegada F que permite distinguir os diferentes tipos de aplicações

TLC.-