GEEMPA - Curso Elementos de Álgebra

Funções ou aplicações

Def. 1: Dados dois conjuntos A e B, e uma relação f de A em B, diz-se que f é uma função ou aplicação de A em B se, para cada elemento x pertencente a A, existe um único y pertencente a B tal que $(x,y) \in f$.

$$f \text{ é função de } A \text{ em } B \Longleftrightarrow (\forall x \in A)(\exists ! y \in B)[(x,y) \in f]$$

$$f \text{ é função de } A \text{ em } B \Longleftrightarrow \begin{array}{l} 1^{\circ})\ (\forall x \in A)(\exists y \in B)[(x,y) \in f] \\ 2^{\circ})\ (\forall x \in A)(\forall y, y' \in B)[(x,y) \in f \\ \quad e\ (x,y') \in f \rightarrow y = y'] \end{array}$$

Notação: $f: A \longrightarrow B$
$x \longmapsto y = f(x)$

A: conjunto de partida, domínio ou campo de definição da f.

B: conjunto de chegada, contra domínio da f.

$\forall x \in A$ $f(x)$ é a imagem do elemento x pela função f, ou valor de f em x.

$\forall X \subset A$ $f(X)$ é o conjunto das imagens dos elementos de X pela f.

$f(A) = Im f = \{y \in B ; \exists x \in A \ \ y = f(x)\}$

$\forall Y \subset B$ $f^{-1}(Y) = \{x \in A ; f(x) \in Y\}$ é a imagem inversa do conjunto Y pela função f.

$Im f \subset B$ $\qquad f^{-1}(B) = A$

Def. 2: Uma função $f: A \rightarrow B$ é sobrejeção, ou função sobrejetora se para todo y de B existe um x em A tal que $f(x) = y$.

$$f: A \rightarrow B \text{ é sobrejetora} \Longleftrightarrow (\forall y \in B)(\exists x \in A)[f(x) = y]$$

$$f: A \rightarrow B \text{ é sobrejetora} \Longleftrightarrow f(A) = B$$

Def. 3: Uma função f de A em B é uma injeção de uma aplicação injetora, se para todo y de B existe no máximo um x em A tal que $f(x) = y$.

$$\boxed{\begin{array}{l} f: A \to B \text{ é injetora} \iff (\forall x, x' \in A)(x \neq x' \to f(x) \neq f(x')) \\ f: A \to B \text{ é injetora} \iff (\forall x, x' \in A)(f(x) = f(x') \to x = x') \end{array}}$$

Def 4: Uma função $f: A \to B$ é uma bijeção ou aplicação bijetora se fôr sobrejetora e injetora

$$\boxed{\begin{array}{l} f: A \to B \text{ é bijetora} \iff f \text{ é sobrejetora e } f \text{ é injetora} \\ f: A \to B \text{ é bijetora} \iff (\forall y \in B)(\exists x \in A)[f(x) = y] \end{array}}$$

Def. 5: Aplicação inversa de uma aplicação bijetora $f: A \to B$ é a aplicação $f^{-1}: B \to A$ tal que $f^{-1}(y) = x$ se e sòmente se $f(x) = y$

$$\boxed{f^{-1} = \{(y, x) \in B \times A;\ (x, y) \in f\}}$$

Def. 6: Se $f: A \to B$ e $g: C \to D$ tal $Im f \subset D g$ chama-se aplicação composta de g e f a aplicação $h: A \to D$ tal que $\forall x \in A$ $h(x) = g(f(x))$. Notação $h = g o f$

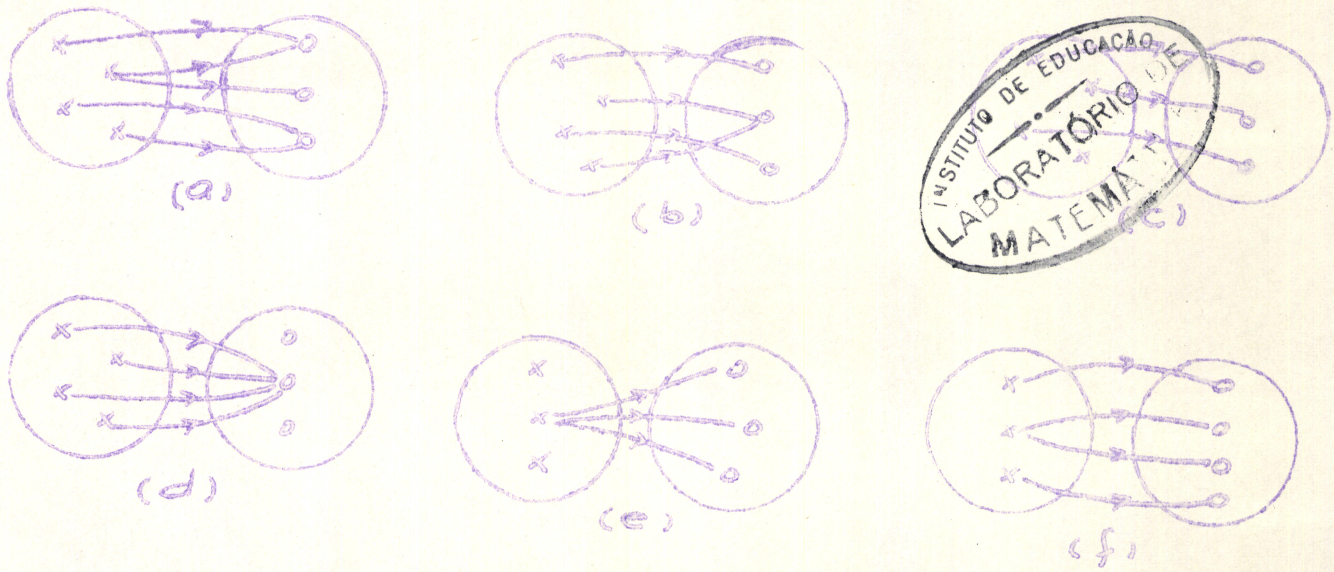
$$\boxed{\begin{array}{l} g o f: A \to D \\ \qquad\quad x \mapsto g(f(x)) \end{array}}$$

Def. 7: Chama-se identidade em um conjunto A a função $f: A \to A$ tal que $\forall x \in A$ $f(x) = x$. Notação $f = id_A$

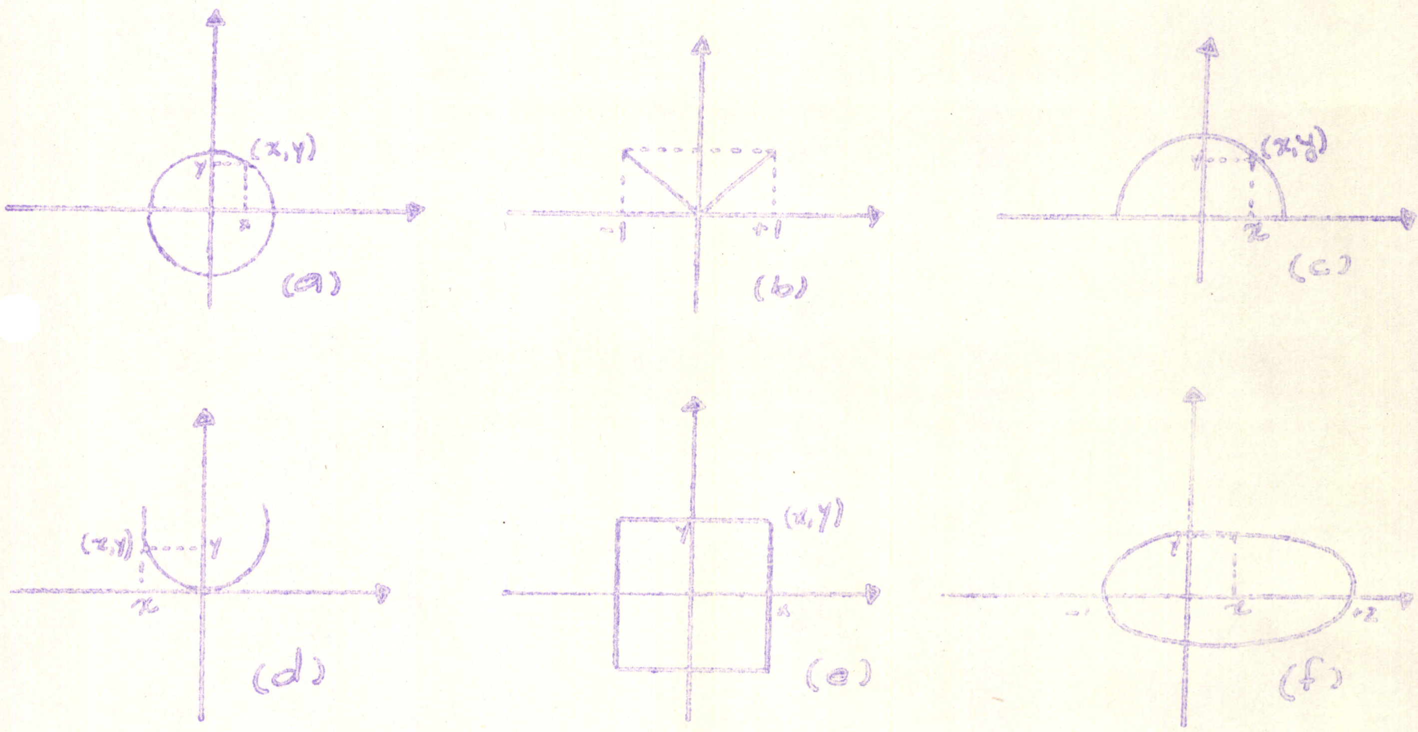
$$\boxed{\begin{array}{l} id_A: A \longrightarrow A \\ \qquad\ \ x \longmapsto x \end{array}}$$

Exercícios

① Verifique quais dos seguintes diagramas representam funções:



② Quais dos seguintes gráficos representam uma função $f: [-1, +1] \longrightarrow \mathbb{R}$?



③ Quais das seguintes relações representam funções de $A = \{0, 1, 2\}$ em $B = \{3, 4, 5\}$

$R_1 = \{(1,3);(1,4);(2,5)\}$

$R_3 = \{(0,3);(1,3);(2,4);(1,5)\}$

$R_2 = \{(0,3);(2,3);(1,5)\}$

$R_4 = \{(1,3);(2,4)\}$

④ Determine todas as aplicações de $E=\{0,1\}$ em $F=\{a,b\}$

⑤ Considere as seguintes aplicações

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto 3x-7$

$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto 5x+2$

$h: A=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\} \longrightarrow \mathbb{N}$
$x \longmapsto \dfrac{x+|x|}{2}$

$r: \mathbb{R}-\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{x}{|x|}$

(a) Qual é a imagem do elemento 2 por f, g, h e r?

(b) Verifique para cada aplicação se existem elementos que tem por imagem 2.

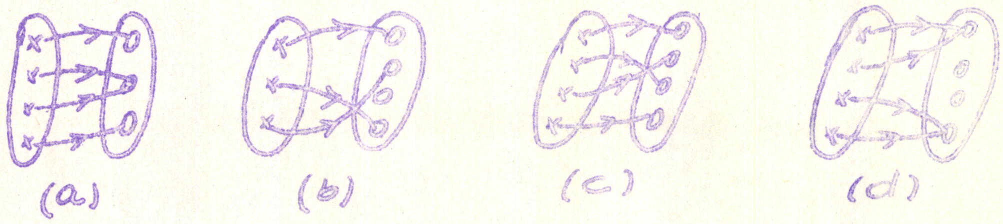
(c) Determine o conjunto de elementos do domínio de cada aplicação que são iguais a sua imagem.

(d) Existem elementos que tem a mesma imagem por f e por g?

(e) Determine: $f(\mathbb{Q})$, $g(\mathbb{R})$ $h(A)$ $r(\mathbb{R}-\{0\})$

(f) $f^{-1}(\{2,5\})$ $g^{-1}(\{12,-8\})$ $h^{-1}(\{1,4\})$ $h^{-1}(\{0\})$ $r^{-1}(\{1\})$

⑥ Verifique se os seguintes diagramas representam funções sobrejetoras ou injetoras.



(a) (b) (c) (d)

⑦ Verifique quais das seguintes aplicações são injeções, sobrejeções ou bijeções:

$f_1: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto 2x$

$f_2: \mathbb{Q}-\{1\} \longrightarrow \mathbb{Q}$
$x \longmapsto \dfrac{x}{x-1}$

$f_3: \mathbb{R} \longrightarrow [-1,+1]$
$x \longmapsto \operatorname{sen} x$

$f_4: \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$
$n \longmapsto$ nº de divisores primos de n

$f_5: \mathcal{P}(A) \longrightarrow \mathcal{P}(A)$
$x \longmapsto C_A x$

$f_6: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^2-x$

(8) Se $f: A \to B$ então $\forall X \subset A$ $f^{-1}[f(X)] \supset X$ e
$\forall Y \subset B$ $f[f^{-1}(Y)] \subset Y$

(a) Faça diagramas mostrando que pode acontecer que:

$f^{-1}[f(X)]$ contém estritamente o conjunto X

$f[f^{-1}(Y)]$ está estritamente contido em Y

(b) Complete:

$(\forall X \subset A)$ $f^{-1}[f(X)] = X \Longrightarrow f$ é ....

$(\forall Y \subset B)$ $f[f^{-1}(Y)] = Y \Longrightarrow f$ é ....

(9) Dadas as bijeções:

$f_1: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x+1$

$f_2: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $x \longmapsto x^2$

$f_3: \mathbb{Q}-\{1\} \longrightarrow \mathbb{Q}-\{1\}$, $x \longmapsto \frac{x}{x-1}$

$f_4: \mathbb{R}-\{-1\} \longrightarrow \mathbb{R}-\{1\}$, $x \longmapsto \frac{x-1}{x-2}$

determine suas inversas e as aplicações

$f_1 \circ f_1^{-1}$ $\quad f_1^{-1} \circ f_1$ $\quad f_2 \circ f_2^{-1}$ $\quad f_2^{-1} \circ f_2$

$f_3 \circ f_3^{-1}$ $\quad f_3^{-1} \circ f_3$

(10) Complete:

$f: A \to B$ $\quad g: B \longrightarrow A$

$g = f^{-1} \Longleftrightarrow$ .... $\circ$ .... $= id_A$ .... $\circ$ .... $= id_B$

(11) Considere as aplicações f, g, h de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definidas por

$f(x) = x+1$ $\quad g(x) = x^2$ $\quad h(x) = x^2 + x$

cont. →

Determine:

$f \circ g$ $\quad g \circ f$ $\quad f \circ h$ $\quad h \circ f$,

$g \circ h$ $\quad h \circ g$ $\quad (f \circ g) \circ h$ $\quad f \circ (g \circ h)$

$(h \circ g) \circ f$ $\quad h \circ (g \circ f)$

(12) A composição de aplicações é comutativa? É associativa? — Justifique sua resposta.

Prove:

$f: A \to B$ $\quad g: B \to C$ são bijetoras $\Rightarrow$

$\Rightarrow (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Respostas

① – (b) (d) ② (b) (c) (d) ③ R_2

④ $f_1=\{(0,a);(1,b)\}$ $f_2=\{(0,b);(1,a)\}$ $f_3=\{(0,a);(1,a)\}$ $f_4=\{(0,b)(1,b)\}$

⑤ (a) $f(2)=-1$ $g(2)=12$ $h(2)=2$ $r(2)=1$

(b) $f(3)=2$ $g(0)=2$ $h(2)=2$ $\forall x\in D_r\ \ r(x)\neq 2$

(c) $\{\frac{7}{2}\}$ $\{-\frac{1}{2}\}$ $\{0,1,2,3\}$ $\{-1,+1\}$

(d) $f(-\frac{9}{2})=g(-\frac{9}{2})$

(e) $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$ $\{0,1,2,3\}$ $\{-1,+1\}$

(f) $\{3,4\}$ $\{2,-2\}$ $\{1\}$ $\{-3,-2,-1,0\}$ $\{x\in\mathbb{R}-\{0\};x<0\}$

⑥ (a) sobrejetora e não injetora

(b) injetora e não sobrejetora

(c) sobrejetora e injetora

(d) não sobrejetora e não injetora

⑦ injeções: f_1, f_2, f_5, f_6

sobrejeções: f_1, f_3, f_4, f_5

bijeções: f_1, f_5

⑧

------- f é injetora

------- f é sobrejetora

⑨ $f_1^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x-1$ $f_2^{-1}:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$, $x\mapsto\sqrt{x}$ $f_3^{-1}:\mathbb{Q}-\{1\}\to\mathbb{Q}-\{1\}$, $x\mapsto\frac{x}{x-1}$ $f_4^{-1}:\mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R}-\{-1\}$, $x\mapsto\frac{x+1}{x-1}$

$f_1\circ f_1^{-1}=f_1^{-1}\circ f_1=id_{\mathbb{R}}$ $f_2\circ f_2^{-1}=f_2^{-1}\circ f_2=id_{\mathbb{R}^+}$ $f_3\circ f_3^{-1}=f_3^{-1}\circ f_3=id_{\mathbb{Q}-\{-1\}}$

⑩ $g\circ f=id_A$ $f\circ g=id_B$

⑪ As compostas são aplicações de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dadas por:

$(f\circ g)(x)=x^2+1$ $(g\circ f)(x)=(x+1)^2$ $(f\circ h)(x)=x^2+x+1$ $(h\circ g)(x)=x^2+3x+2$

$(g\circ h)(x)=(x^2+x)^2$ $(h\circ g)(x)=x^4+x^2$

$[(f\circ g)\circ h](x)=(x^2+x)^2+1$ $[f\circ(g\circ h)](x)=(x^2+x)^2+1$

$[(h\circ g)\circ f](x)=(x+1)^4+(x+1)^2$ $h\circ(g\circ f)(x)=(x+1)^4+(x+1)^2$

⑫ Pessoal

Arquivado
6/5/82