Instituto de Educação Gen. Flores da Cunha Lab. Matem. 1978

Laboratório de Matemática

Colega, neste primeiro encontro pretendemos fazer contigo uma revisão dos conteúdos de Lógica, de Teoria dos Conjuntos e de Topologia, que são pré-requisitos para o estudo que nos propomos realizar.

Apresentamos algumas definições, exemplos e exercícios com suas respectivas soluções para que possas te auto-avaliar.

I - Introdução à Lógica

1. Sentenças são frases que exprimem um pensamento com sentido completo.

Proposições são sentenças que não envolvem símbolos variáveis. Ex: $5+2=7$

Sentenças abertas são sentenças que envolvem variável.

Ex: $x < 8$

1.1. Assinala com P as proposições e com S as sentenças abertas.

a. ( ) Hoje é

b. ( ) y é estudioso

c. ( ) $3 \geq 5$

d. ( ) $x < 2$

e. ( ) $3+5=$

f. ( ) $3-2=6$

g. ( ) O Brasil é a nossa Pátria

h. ( ) $x+2=7$

i. ( ) $\frac{y}{2} + 4y = 27$

Respostas do exercício 6.2

a) (F)
b) Verificar
c) (F)
d) Verificar
e) (F)

Respostas do exercício 6.1

a) $\exists$
b) $\exists$
c) $\exists$
d) $\exists$
e) $\exists$
f) $\exists$
g) $\forall$ ou $\exists$

2. Toda proposição tem um e só um valor lógico:

Verdade - V

Falsidade - F

Exemplos: $3+8=11$ (V)

$4-2<1$ (F)

2.1. Coloca V ou F de acordo com a Verdade ou Falsidade das seguintes proposições:

a. ( ) $3+7=10$

b. ( ) $4 \times 5 = -20$

c. ( ) $7<8$

d. ( ) $0<-1$

e. ( ) 2 é número primo

3. Na formação de novas proposições, a partir de outras, entram os chamados conectivos:

"e" - ($\wedge$)

"ou" - ($\vee$)

"se... então - ($\rightarrow$)

"se e somente se" - ($\leftrightarrow$)

bem como o modificador "não" - ($\sim$) (não é verdade que)

As proposições classificam-se em simples e compostas.

As proposições simples não contém conectivos.

As proposições compostas são obtidas a partir das simples, pelo uso dos conectivos.

Costumamos representar as proposições simples pelas letras minúsculas p, q, r, s, ...

Respostas:

5.1 - a) (V) b) (F) c) (F) d) (V) e) (V) f) (V)

5.2 a) (F) b) (F) c) (V) d) (V) e) (F) f) (V)

5.3 a) amarela b) qualquer cor c) qualquer cor d) qualquer cor

Exemplos: "O lápis é preto" é uma proposição (p)

"O lápis tem ponta" é outra proposição (q)

Representamos por: $p \wedge q$ - O lápis é preto e tem ponta.

$p \vee q$ - O lápis é preto ou tem ponta.

$p \rightarrow q$ - Se o lápis é preto então tem ponta.

$p \leftrightarrow q$ - O lápis é preto se e somente se tem ponta.

$\sim p$ - O lápis não é preto.

3.1 Dadas as proposições q: $5>2$

r: $3<4$

Escreve as compostas representadas por:

$q \vee r$: ______________________

$r \rightarrow q$: ______________________

$q \leftrightarrow r$: ______________________

3.2 Sabendo que (p): Paulo dirige avião.

(q): João dirige automóvel.

(r): Paulo é primo de João.

representa com simbolos da Lógica as proposições:

a. João dirige automóvel e Paulo dirige avião. ________

b. Se Paulo dirige avião então é primo de João. ________

c. João não dirige automóvel. ________

d. Não é verdade que Paulo não dirige avião. ________

e. João dirige automóvel ou Paulo é primo de João. ________

4. O valor lógico de uma proposição fica alterado quando aplicamos a esta proposição o modificador não. Ex: $3+2=5$ V; $\sim(3+2=5)$; $3+2 \neq 5$ F; $8>9$ F; $\sim(8>9)$; $8 \leq 9$ V

Respostas:

3.1) $5>2 \vee 3<4$

$3<4 \rightarrow 5>2$

$5>2 \leftrightarrow 3<4$

3.2 a) $q \wedge p$

b) $p \rightarrow r$

c) $\sim q$

d) $\sim(\sim p)$

e) $q \vee r$

5- O valor lógico de uma proposição composta depende dos valores das proposições componentes:

a) Uma proposição do tipo $p \wedge q$ é verdadeira somente quando p e q são verdadeiros.

b) Uma proposição do tipo $p \vee q$ é falsa somente quando p e q são falsas.

c) Uma proposição do tipo $p \rightarrow q$ é falsa somente quando p é verdadeira e q é falsa.

d) Uma proposição do tipo $p \leftrightarrow q$ é falsa quando p e q possuem valores lógicos diferentes e é verdadeira quando p e q possuem o mesmo valor lógico, isto é, quando ambas são verdadeiras ou ambas são falsas.

5.1- Coloca V ou F de acordo com a verdade ou falsidade das proposições compostas.

a.- ( ) $3+2=5 \vee 5-2=1$
b.- ( ) $6 \times 6 = 36 \rightarrow \sqrt{6} = 36$
c.- ( ) $8+3=10 \wedge 10-3=8$
d. ( ) $9 \times 5 = 145 \rightarrow 145 \div 5 = 9$
e. ( ) $4^2 = 16 \leftrightarrow \sqrt{16} = 4$
f.- ( ) $9-10=-1 \wedge (-1)+10=9$

5.2- Assinala com X as proposições falsas sabendo que:

p: João é médico. (verdadeira)
q: Maria sabe cozinhar (falsa)

a) $p \wedge q$ ( )
b) $p \rightarrow q$ ( )
c) $q \rightarrow p$ ( )
d) $p \vee q$ ( )
e) $p \leftrightarrow q$ ( )
f) $q \vee p$ ( )

5.3- Pinta as figuras de modo que as proposições que as acompanham sejam verdadeiras.

a)  Ela é amarela e tem haste.

b)  Ela é vermelha se e somente se for maçã.

c)  Se é menino então seu chapéu é preto.

d)  Ele é verde ou está arrebentado.

Respostas: 2.1 a) (V)
b) (F)
c) (V)
d) (F)
e) (V)

6. As sentenças abertas são aquelas que envolvem variável e as quais não se podem atribuir valores "falso" ou "verdadeiro", como, por exemplo:

Ele é jogador de futebol

$x + 4 = 5$

x é um planeta

Conhecendo-se o conjunto dos valores possíveis da variável isto é, o Conjunto Universo no qual estamos trabalhando, pode-se substituí-la por um elemento arbitrário deste Universo, tornando a expressão falsa ou verdadeira.

Estas sentenças tornam-se proposições depois de substituída a variável por um elemento determinado que permite decidir se o resultado é "falso" ou "verdadeiro".

<u>Exemplo</u>: Se na expressão $x+4=5$ colocamos 9 em lugar de x obtemos $9+4=5$ que é uma proposição falsa e se colocamos 1, teremos $1+4=5$ que é uma proposição verdadeira

Outra maneira de passar de sentenças abertas a proposições é pela quantificação da variável. Há dois quantificadores:

* Quantificador Universal é o que tem significado "qualquer que seja", "para todo...", Indica-se por $\forall$.

Ex: $x \geq 0$ é uma sentença aberta no Universo $\mathbb{N}$ mas "qualquer que seja x, $x \geq 0$" é uma proposição.

Simbolicamente: $\forall x, x \geq 0$. $(x \in \mathbb{N})$

* Quantificador Existencial é o que tem significado "existe".

Indica-se por $\exists$

Ex: A sentença "$x+4=5$", sendo $x \in \mathbb{N}$, torna-se proposição ao ser quantificada com "existe x tal que $x+4=5$".

Simbolicamente, $(\exists x)(x+4=5)$

Respostas: 1.1

	a) ( )	d) (S)	g) (P)
	b) (S)	e) ( )	h) (S)
	c) (P)	f) (P)	i) (S)

6.1 Usa os quantificadores $\forall$ ou $\exists$ de modo que as sentenças abertas se tornem proposições verdadeiras:

O Conjunto Universo é o Conjunto dos nºs naturais.

a) $x > 0$
b) x é par
c) x é múltiplo de 5
d) x é divisor de 1000
e) x é nº primo
f) x é potência de 10
g) x é divisivel por 1

6.2- Sabendo que U é o conjunto de pessoas desta sala coloca V ou F:

a) ( ) $\forall x$, x é casado.
b) ( ) $\exists x$ tal que x é carioca.
c) ( ) $\forall x$, x está de casaco marron
d) ( ) $\exists x$ tal que x está de casaco marron
e) ( ) $\forall x$, x está de óculos.