ALGACYR MUNHOZ MAEDER

CURSO DE MATEMÁTICA

"USO AUTORIZADO PELO MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E SAÚDE"
REGISTRO N.º 548

4.ª SÉRIE - CURSO GINASIAL

6.ª Edição

EDIÇÕES MELHORAMENTOS

30,00

definição área plana pag 282

JBXavier

ALGACYR MUNHOZ MAEDER
Lente Catedrático
do Colégio Estadual do Paraná, da Faculdade de Engenharia do Paraná
e da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras do Paraná

CURSO DE MATEMÁTICA

4.ª SÉRIE

Curso Ginasial

6.ª EDIÇÃO

1951

EDIÇÕES MELHORAMENTOS

12/V-0

75.º MILHEIRO

Nos pedidos telegráficos basta citar o n.º 705

DO PINHEIRO AO LIVRO, UMA REALIZAÇÃO MELHORAMENTOS

INDICE

CAPITULO I — *Coordenadas cartesianas no plano Representações gráficas*

CAPÍTULO II — *Resolução e discussão de um sistema de duas equações com duas incógnitas*

CAPITULO III — *Resolução de desigualdades do 1.º grau com uma ou duas incógnitas*

CAPITULO IV — *Problemas do 1.º grau*

CAPÍTULO V — *Números irracionais — Radicais — Frações irracionais*

CAPÍTULO VI — *Equações do 2.º grau*

CAPÍTULO VII — *Problemas do 2.º grau*

CAPÍTULO VIII — *Linhas proporcionais*

CAPÍTULO IX — *Semelhança de triângulos e de polígonos*

CAPÍTULO X — *Relações métricas nos triângulos*

CAPÍTULO XI — *Relações métricas no círculo*

CAPÍTULO XII — *Polígonos regulares*

CAPÍTULO XIII — *Medição da circunferência*

CAPÍTULO XIV — *Áreas planas*

Capítulo I

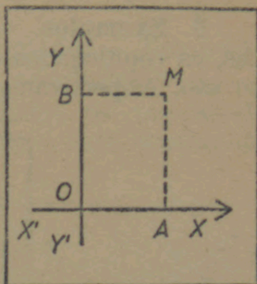
COORDENADAS CARTESIANAS NO PLANO
REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS

1. Determinação de um ponto. — A posição de qualquer ponto de uma reta orientada fica perfeitamente determinada pela distância do ponto a outro fixo da reta, considerado como origem.

Entretanto, para fixar a posição de um ponto no plano são necessárias duas grandezas.

Essas grandezas, denominadas *coordenadas* do ponto, podem ser escolhidas de vários modos, segundo os *sistemas* adotados. Entre êstes, estudaremos aqui o sistema cartesiano ortogonal.

2. Coordenadas cartesianas no plano. — Sejam XX′ e YY′ duas retas perpendiculares entre si no ponto O, figura ao lado.



A reta XX′ chama-se *eixo das abscissas* ou eixo dos x, a reta YY′ *eixo das ordenadas* ou eixo dos y, e o ponto em que XX′ e YY′ se cortam chama-se *origem*.

XX′ e YY′ formam um *sistema de coordenadas* retangulares.

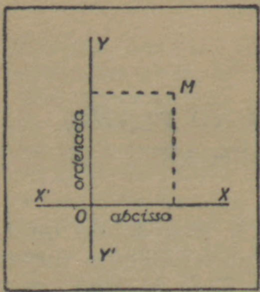
Admitamos escolhida a unidade para a medida dos segmentos, e bem assim que os eixos estejam orientados, de modo que os pontos situados para a direita de O em XX′ e para cima de O em YY′ correspondam a números positivos.

Seja M um ponto do plano determinado pelos eixos.

Se traçarmos por M a perpendicular a cada um dos eixos, determinaremos dois dos seus pontos, A e B, e conseqüentemente, os valores de OA e OB, com os respectivos sinais. — Seja, por exemplo

$$OA = +3$$

$$OB = +5.$$



À medida algébrica do segmento orientado OA dá-se a denominação de *abscissa* do ponto M, e à medida algébrica do segmento orientado OB dá-se a denominação de *ordenada* do ponto M.

A abscissa e a ordenada de um ponto são chamadas *coordenadas* do ponto.

Geralmente, a abscissa de um ponto é representada pela letra x e a ordenada pelo letra y.

Assim, para designar um ponto, M, definido pelas coordenadas

$$x = +5$$

$$y = +2,$$

escrevemos

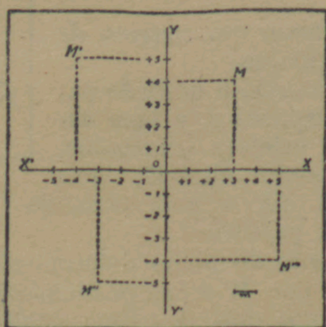
$$M\,(x = 5,\ y = 2),$$

ou simplesmente,

$$M\,(5;\ 2),$$

com o cuidado de colocar sempre em primeiro lugar a abscissa.

3. **Exemplos.** — Tendo em conta a orientação dos eixos, as coordenadas dos pontos que aparecem na figura abaixo são, respectivamente:



$$\mathrm{M}\begin{cases}\text{abscissa} = +3\\ \text{ordenada} = +4\end{cases} \quad \text{ou} \quad \mathrm{M}\,(3;\,4)$$

$$\mathrm{M'}\begin{cases}\text{abscissa} = -4\\ \text{ordenada} = +5\end{cases} \quad \text{ou} \quad \mathrm{M'}\,(-4;\,5)$$

$$\mathrm{M''}\begin{cases}\text{abscissa} = -3\\ \text{ordenada} = -5\end{cases} \quad \text{ou} \quad \mathrm{M''}\,(-3;\,-5)$$

$$\mathrm{M'''}\begin{cases}\text{abscissa} = +5\\ \text{ordenada} = -4\end{cases} \quad \text{ou} \quad \mathrm{M'''}\,(5,\,-4).$$

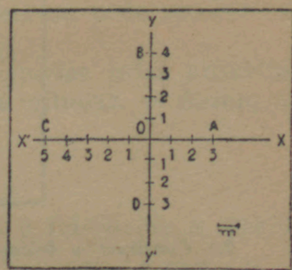
4. **Observação.** — A ordenada de qualquer ponto do eixo dos x é nula, e bem assim a abscissa de qualquer ponto do eixo dos y; as coordenadas da origem são ambas nulas. — Temos, assim,

$$\mathrm{A}\begin{cases}x=3\\ y=0\end{cases} \quad \text{ou} \quad \mathrm{A}\,(3;\,0)$$

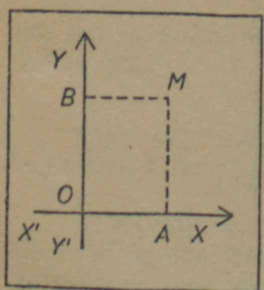
$$\mathrm{B}\begin{cases}x=0\\ y=4\end{cases} \quad \text{ou} \quad \mathrm{B}\,(0;\,4)$$

$$\mathrm{C}\begin{cases}x=-5\\ y=0\end{cases} \quad \text{ou} \quad \mathrm{C}\,(-5;\,0)$$

$$\mathrm{D}\begin{cases}x=0\\ y=-3\end{cases} \quad \text{ou} \quad \mathrm{D}\,(0,\,-3).$$



5. **Determinação de um ponto no plano.** — Um ponto no plano fica determinado pelas suas coordenadas.



Com efeito, dados os valores de OA e OB com os sinais correspondentes,

$$\mathrm{OA} = a$$

$$\mathrm{OB} = b,$$

ficam determinados os pontos A e B, e portanto, o ponto M, interseção das perpendiculares aos eixos, traçadas por aquêles pontos.

Assim, para marcar o ponto M, dado pelas suas coordenadas,

$$x = 3$$
$$y = 5,$$

basta tomar, sôbre os eixos, os segmentos

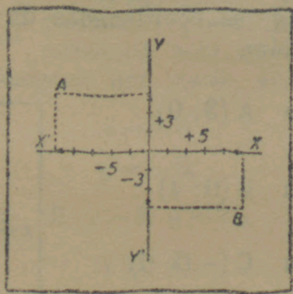
$$OA = +3$$
$$OB = +5,$$

e traçar as perpendiculares aos eixos pelos pontos A e B. A interseção dessas perpendiculares determina o ponto M.

6. **Exercícios.** — 1.º *Marcar os pontos A e B, cujas coordenadas são*

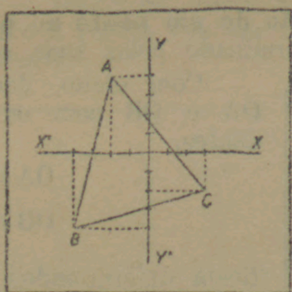
$$A(-5, +3)$$
$$B(+5, -3).$$

Solução:



2.º *Construir o triângulo cujos vértices são* A (— 2, + 4), B (— 4, — 4) e C (+ 3, — 2).

Solução:



7. **Noção de função.** — Consideremos a expressão algébrica

$$3x - 5.$$

Evidentemente, o valor numérico da expressão depende do valor numérico da letra x.

Com efeito, para

$x = -1$	$v.n = -8$
$x = 0$	$v.n = -5$
$x = 1$	$v.n = -2$
$x = 2$	$v.n = 1$
$x = 3$	$v.n = 4$
.....	....

Dizemos, então, que o valor numérico da expressão algébrica é uma *função* do valor da letra x, ou abreviadamente, que a expressão algébrica é uma *função* de x.

Tôda letra cujo valor numérico é suscetível de variar diz-se letra variável, ou simplesmente, *variável.*

Por outro lado, dá-se a denominação de *constante* a tôda letra que representa quantidade que tem ou pode receber valor determinado.

Em geral, as constantes são designadas pelas primeiras letras do alfabeto e as variáveis pelas últimas. — Assim, na expressão

$$y = ax + b,$$

x e y são variáveis, a e b constantes.

Para indicar que certa expressão é função de x, usa-se o símbolo

$$f(x),$$

que se lê: função de x. — Assim, por exemplo, a expressão

$$y = 4x^2 + 3x + 5,$$

em que y é função de x, pode ser representada abreviadamente por

$$y = f(x).$$

Tôda expressão algébrica que contém uma ou diversas variáveis é função dessa ou dessas variáveis [1].

8. **Exemplos.** — O salário de um operário é função da duração do seu trabalho. Assim, se o operário percebe 3 cruzeiros por hora de trabalho, durante t horas ou frações de horas, ganhará $3t$ cruzeiros.

(1) A noção aqui dada é muito elementar.

Designando por s o salário expresso em cruzeiros, temos, então, a fórmula

$$s = 3t,$$

em que s é uma função da variável t.

A distância percorrida sôbre um eixo por um móvel, animado de movimento uniforme, com a velocidade v, durante t segundos, é dada pela fórmula

$$x = vt.$$

Nessa fórmula, a velocidade dada v é constante, t é a variável e x é a função.

Em geral, tôda fórmula exprime uma certa quantidade em função de outra.

9. **Funções crescentes e decrescentes.** — Consideremos a função

$$y = 5x + 3.$$

Atribuindo a x os valores particulares indicados no quadro abaixo, vejamos quais os valores que resultam para y.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	cresce.
y	-12	-7	-2	3	8	13	18	cresce.

Dizemos, então, que a função

$$y = 5x + 3$$

é *crescente*, por isso que x e y variam no mesmo sentido, a saber, o seu valor cresce quando a variável aumenta.

Consideremos, agora, a função

$$y = 3 - 2x.$$

Atribuindo a x os valores particulares indicados no quadro abaixo, vejamos quais os valores que resultam para y.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	cresce.
y	9	7	5	3	1	-1	-3	decresce.

Dizemos, então, que a função

$$y = 3 - 2x$$

é *decrescente*, por isso que x e y variam em sentido contrário, a saber, o seu valor diminui quando a variável aumenta.

10. **Função linear.** — Seja a função

$$y = ax + b,$$

em que y depende de um polinômio do 1.º grau em x.

A uma função dêsse tipo dá-se a denominação de *função linear*.

11. **Representação gráfica da função linear.** — Consideremos uma função da forma

$$y = ax + b.$$

Seja, por exemplo,

$$y = 3x + 2.$$

Atribuamos à variável x alguns valores particulares. — Para

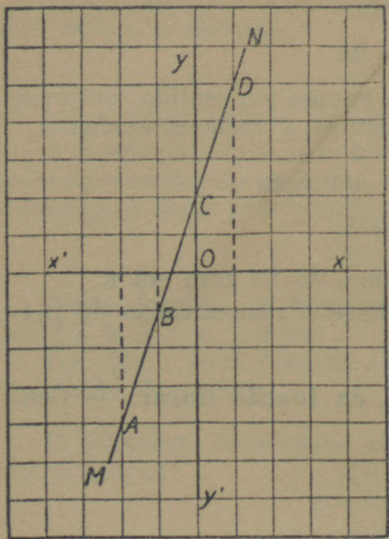
$x = -2$	$y = -4$
$x = -1$	$y = -1$
$x = 0$	$y = 2$
$x = 1$	$y = 5$
.....	.....

Os pares de números assim obtidos determinam pontos do plano que podem ser referidos ao sistema de coordenadas retangulares.

Para maior facilidade, tracemos em papel quadriculado os eixos XX′ e YY′, figura à página seguinte.

Adotando como unidade o lado de um dos quadrículos e observando a convenção dos sinais, marquemos os pontos definidos pelas coordenadas acima. — Sejam

A $(-2, -4)$
B $(-1, -1)$
C $(0; 2)$
D $(1; 5)$
....



Ligando êsses pontos por traço contínuo, obtemos a reta MN, que é a *representação gráfica* da função

$$y = 3x + 2.$$

12. **Observação.** — Demonstra-se que a representação gráfica da função linear

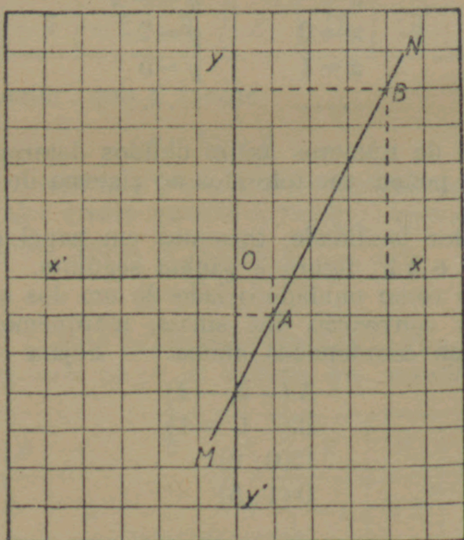
$$y = ax + b$$

é uma linha reta.

Assim, para obter o gráfico das funções dêsse tipo, basta que se marquem dois pontos da linha correspondente.

Consideremos um exemplo: seja a função

$$y = 2x - 3.$$



Atribuindo à variável x dois valores distintos, 1 e 4, por exemplo, temos

$$\begin{array}{c|c} x=1 & y=-1 \\ x=4 & y=5. \end{array}$$

Marcando os pontos A e B, definidos pelas coordenadas

$$A\,(1, -1)$$
$$B\,(4; 5),$$

e ligando-os por traço contínuo, obtemos a reta MN, que representa gràficamente a função

$$y=2x-3.$$

13. **Caso particular.** — Admitamos que a constante b da função linear

$$y=ax+b$$

é nula. — Nesse caso, temos

$$y=ax.$$

Notando que, para $x=0$ resulta sempre $y=0$, e bem assim que

$$x=0$$
$$y=0$$

são as coordenadas da origem, segue-se que o gráfico da função

$$y=ax$$

é uma linha reta que passa pela origem das coordenadas.

14. **Representação gráfica das equações do 1.º grau com duas incógnitas.** — 1.º Seja a equação

$$4x+3y=11.$$

Passando o têrmo em x para o segundo membro, vem

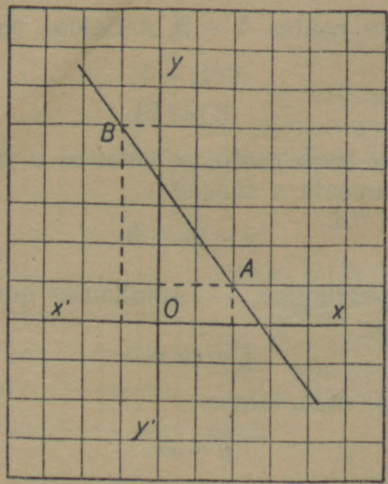
$$3y=11-4x.$$

Dividindo ambos os membros pelo coeficiente de y, obtemos

$$y=\frac{11-4x}{3}.$$

A equação dada ficou, dêsse modo, resolvida em relação a y.

Como o gráfico dessa função é linha reta (n. 12), para obtê-lo basta marcar dois dos seus pontos.



Para $x=2$, por exemplo, temos

$$y=\frac{11-8}{3},$$

$$y=1.$$

Para $x=-1$, temos

$$y=\frac{11+4}{3},$$

$$y=5.$$

Representemos, pois, os pontos A e B, definidos pelas coordenadas

$$A\,(2;\,1)$$
$$B\,(-1;\,5).$$

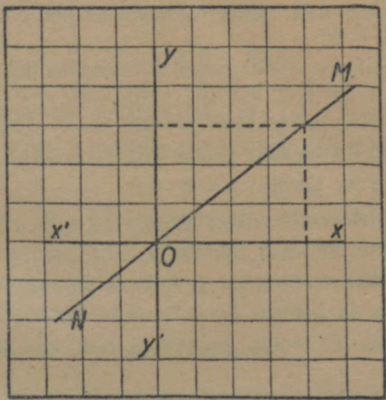
Ligando êsses pontos por traço contínuo, obtemos o gráfico da função

$$4x+3y=11.$$

2.º Consideremos, agora, a equação

$$3x=4y.$$

Resolvendo-a em relação a y, como no exemplo anterior, vem



$$y=\frac{3}{4}x.$$

Notando que o gráfico dessa função é uma linha reta que passa pela origem, para obtê-lo basta marcar um dos seus pontos.

Para $x=4$, por exemplo, temos

$$y=\frac{3}{4}\times 4,$$

$$y=3.$$

Representemos, pois, o ponto M, definido pelas coordenadas

$$M(4;\ 3).$$

Ligando êsse ponto à origem por traço contínuo, obtemos o gráfico da função.

$$3x=4y.$$

15. EXERCICIOS.

1. Marcar o ponto cujas coordenadas são: 2; 5.
2. Marcar o ponto cujas coordenadas são: —3; 4.
3. Marcar o ponto cujas coordenadas são: —5; —5.
4. Marcar o ponto cujas coordenadas são: 4; —2.

5. Traçar o triângulo ABC cujas coordenadas dos vértices são: A $(-2; 3)$, B $(-5; -4)$ e C $(5; -3)$.
6. Traçar o triângulo ABC cujas coordenadas dos vértices são: A $(2; 0)$, B $(0; 4)$ e C $(-2; 0)$.
7. Traçar o quadrilátero ABCD cujas coordenadas dos vértices são: A $(7; 3)$, B $(-3; 3)$, C $(-7; 3)$ e D $(3; -3)$.
8. Construir o gráfico da função: $y = 5x$.
9. Traçar o gráfico da função: $y = x + 2$.
10. Traçar o gráfico da função: $y = 3 - x$.
11. Representar gràficamente a função: $y = 3x + 2$.
12. Representar gràficamente a função: $y = 5x - 3$.
13. Construir o gráfico da função: $2y = 3x + 2$.
14. Traçar o gráfico da função: $3y - 2x = 6$.
15. Achar a ordenada do ponto em que a reta $y = 2x + 3$ corta o eixo dos y. R. 3.
16. Achar a abscissa do ponto em que a reta $y = 3x + 6$ corta o eixo dos x. R. -2.
17. Achar a ordenada do ponto em que a reta $2y = 3x - 4$ corta o eixo dos y. R. -2.
18. Achar a abscissa do ponto em que a reta $3y = 2x + 8$ corta o eixo dos x. R. -4.
19. Escrever a equação da reta paralela ao eixo dos x que corta o eixo dos y no ponto de ordenada 5. R. $y = 5$.
20. Escrever a equação da reta paralela ao eixo dos x que corta o eixo dos y no ponto de ordenada m. R. $y = m$.
21. Escrever a equação da reta paralela ao eixo dos y que corta o eixo dos x no ponto de abscissa -4. R. $x = -4$.
22. Escrever a equação da reta paralela ao eixo dos y que corta o eixo dos x no ponto de abscissa m. R. $x = m$.
23. Escrever a equação da reta em a qual cada ponto tem a abscissa igual à ordenada. R. $y = x$.
24. Escrever a equação da reta em a qual cada ponto tem a ordenada igual ao dôbro da abscissa. R. $y = 2x$.
25. Escrever a equação da reta em a qual cada ponto tem a ordenada igual a m vêzes a abscissa. R. $y = mx$.
26. Determinar gràficamente a abscissa do ponto em que a reta que passa pelos pontos A $(6; -3)$ e B $(-4; 3)$ corta o eixo dos x. R. 1.
27. Determinar gràficamente a ordenada do ponto em que a reta que passa pelos pontos A $(-8; -2)$ e B $(-3; 3)$ corta o eixo dos y. R. 6.
28. Certa reta contém os pontos A $(-7; 9)$ e B $(6; 0)$. Achar a ordenada do ponto dessa reta cuja abscissa é 3. R. 2.
29. Certa reta contém os pontos A $(0; 4)$ e B $(6; 0)$. Achar gràficamente a abscissa do ponto dessa reta cuja ordenada é 9. R. -7.
30. Determinar gràficamente as coordenadas do ponto em que as retas $y = 3x - 1$ e $y = x + 3$ se cortam. R. 2; 5.

CAPÍTULO II

RESOLUÇÃO E DISCUSSÃO DE UM SISTEMA DE DUAS EQUAÇÕES COM DUAS INCÓGNITAS

16. **Equação do 1.º grau com duas incógnitas.** — De acôrdo com os princípios estabelecidos na série anterior dêste curso, uma equação do 1.º grau com duas incógnitas pode ser posta sob a forma

$$ax + by = c,$$

em que a, b e c representam números inteiros quaisquer.

A equação do 1.º grau com duas incógnitas é verificada por uma infinidade de valores das incógnitas x e y.

Com efeito, a cada valor atribuído a x, resulta um valor particular para y.

Consideremos um exemplo: seja a equação

$$2x + 3y = 6.$$

Exprimindo o valor de y em função de x, vem

$$3y = 6 - 2x,$$

$$y = \frac{6 - 2x}{3}.$$

Atribuamos a x alguns valores particulares. — Para

$x = -1$	$y = \frac{8}{3}$
$x = 0$	$y = 2$
$x = 1$	$y = \frac{4}{3}$
$x = 2$	$y = \frac{2}{3}$
$x = 3$	$y = 0.$
.....	......

Os pares de valores assim obtidos são soluções da equação

$$2x+3y=6.$$

Do mesmo modo, a cada valor atribuído a y resulta certo valor para x.

Uma equação diz-se *indeterminada* quando admite infinidade de soluções.

Em geral, a equação do primeiro grau com duas incógnitas é indeterminada.

17. Sistema de equações. — Sejam, agora, as equações

$$2x-3y=4 \quad \text{e} \quad 3x+5y=25,$$

cada uma das quais, como sabemos, admite infinidade de soluções.

Entre as soluções da primeira equação e as da segunda existe a solução comum:

$$\begin{cases} x=5, \\ y=2. \end{cases}$$

Quando procuramos determinar uma solução comum para duas ou mais equações com duas ou mais incógnitas, dizemos que as equações consideradas formam um *sistema*.

As equações que constituem um sistema são chamadas *equações simultâneas*.

O conjunto dos valores das incógnitas que verificam tôdas as equações de um sistema chama-se *solução* do sistema.

18. Sistemas equivalentes. — Dois sistemas dizem-se *equivalentes* quando admitem a mesma solução.

Assim, os sistemas

$$\begin{cases} 3x-2y=2 \\ 4x+5y=41 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 2x+3y=23 \\ 7x-4y=8 \end{cases}$$

são equivalentes, pois admitem a solução comum:

$$\begin{cases} x=4, \\ y=5. \end{cases}$$

19. **Resolução de um sistema.** — *Resolver* um sistema é achar a sua solução.

Os métodos empregados na resolução dos sistemas de equações fundam-se nos princípios estabelecidos a seguir.

De modo geral, para resolver um sistema de duas equações com duas incógnitas procura-se transformá-lo em outro equivalente, no qual uma das equações contenha uma só incógnita.

A resolução desta equação dará o valor de uma das incógnitas; substitui-se, depois, esta incógnita por seu valor numa das equações do sistema e resolve-se a equação obtida.

20. **Princípio I.** — *Resolvendo uma das equações de um sistema em relação a uma incógnita e substituindo o valor dessa incógnita nas outras equações, obtém-se um sistema equivalente ao primitivo.*

Servindo-nos da notação simbólica, consideremos o sistema

$$\begin{cases} A = B \\ C = D \\ E = F, \end{cases} \qquad (1)$$

em que figuram três incógnitas.

Resolvendo a primeira equação relativamente a x, obtemos o sistema

$$\begin{cases} x = B' \\ C = D \\ E = F, \end{cases} \qquad (2)$$

em que B′ não contém x, enquanto as demais equações encerram esta incógnita.

Substituindo, nas duas últimas equações do sistema acima, x pelo valor obtido na primeira, vem

$$\begin{cases} x = B' \\ C' = D' \\ E' = F'. \end{cases} \qquad (3)$$

Dizemos que são equivalentes os sistemas (1) e (3).

Com efeito, as equações

$$A = B \quad \text{e} \quad x = B'$$

são equivalentes, de vez que a segunda nada mais é do que uma transformação da primeira.

Conseqüentemente, para os valores convenientes às incógnitas que figuram no sistema (1), a equação

$$x = B'$$

se transforma em identidade.

De outra parte, como x foi substituído por B′ nas demais equações do sistema (3), segue-se que estas continuam a admitir as mesmas raízes que as do sistema (1).

Reciprocamente, qualquer solução do último sistema identifica x a B′, o que nos permite substituir B′ por x nas equações do primeiro sistema.

Somos, assim, levados à conclusão de que os sistemas considerados são equivalentes.

21. **Princípio II.** — *Em um sistema de equações simultâneas, substituindo uma delas por outra resultante da adição ou subtração desta a qualquer das restantes, obtém-se um sistema equivalente ao primitivo.*

Consideremos o sistema

$$\left| \begin{aligned} A &= B \\ C &= D \\ E &= F. \end{aligned} \right.$$

Somando ou subtraindo as duas primeiras equações formamos o novo sistema

$$\left| \begin{aligned} A \pm C &= B \pm D \\ C &= D \\ E &= F, \end{aligned} \right.$$

cuja equivalência com o primeiro queremos demonstrar.

Com efeito, qualquer solução do primeiro sistema, transformando em identidades tôdas as equações que o constituem, para os mesmos valores que tornam idênticos tanto A e B como C e D, a expressão

$$A \pm C = B \pm D$$

se transforma em identidade.

Além disso, como as demais equações pertencem aos dois sistemas segue-se que a solução do primeiro convém igualmente ao segundo.

Reciprocamente, vemos que a solução do segundo sistema, convertendo em identidades as equações

$$A \pm C = B \pm D \quad e \quad C = D,$$

tornam A e B idênticos, o que nos permite concluir que a solução do segundo sistema satisfaz também ao primeiro.

São, pois, equivalentes os sistemas propostos.

22. **Métodos de eliminação.** — Consideremos o sistema

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 3. \end{cases}$$

Veremos logo a seguir que êsse sistema, com auxílio de operação simples, pode ser transformado no seguinte:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x = 8, \end{cases}$$

equivalente ao primitivo, e no qual a segunda equação contém apenas uma incógnita.

Dizemos, nesse caso, que a incógnita y foi *eliminada*.

A eliminação de uma incógnita é feita mediante vários processos e artifícios distintos, os quais caracterizam os *métodos de eliminação*. Entre êstes, estudaremos os seguintes:

a) *eliminação por substituição;*

b) *eliminação por comparação;*

c) *eliminação por adição.*

23. **Eliminação por substituição.** — Consideremos o sistema

$$A \begin{cases} x + 3y = 9 \\ 2x - y = 4. \end{cases}$$

Resolvendo a primeira equação em relação a x, como se y fôsse conhecido, encontramos

$$x = 9 - 3y. \qquad (1)$$

Substituindo x pelo valor acima na segunda equação do sistema proposto, vem

$$2(9 - 3y) - y = 4. \qquad (2)$$

As equações (1) e (2) formam o sistema

$$B \begin{cases} x = 9 - 3y & (3) \\ 2(9 - 3y) - y = 4, & (4) \end{cases}$$

que é equivalente ao primitivo e no qual a segunda equação contém apenas uma incógnita.

Resolvendo-a, encontraremos sucessivamente

$$2(9 - 3y) - y = 4$$

$$18 - 6y - y = 4$$

$$-6y - y = 4 - 18$$

$$-7y = -14$$

$$y = \frac{14}{7}$$

$$y = 2.$$

Substituindo, no sistema B, a equação (4) pelo valor acima, formamos o sistema

$$C \begin{cases} x = 9 - 3y \\ y = 2. \end{cases}$$

Substituindo y por seu valor na primeira equação do sistema C, resulta

$$x = 9 - 3y$$

$$x = 9 - 3 \times 2$$

$$x = 9 - 6$$

$$x = 3.$$

Obtemos, dêsse modo, a solução do sistema proposto

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 2. \end{cases}$$

Verificação: substituindo, nas equações do sistema (A), x e y pelos valores obtidos, vem

$$3 + 3 \times 2 = 9 \quad \text{ou} \quad 9 = 9.$$

$$2 \times 3 - 2 = 4 \quad \text{ou} \quad 4 = 4.$$

24. Regra. — *Para resolver um sistema de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas pelo método de substituição, preparam-se as equações, resolve-se qualquer delas em relação a uma das incógnitas, como se a outra fôsse conhecida; substitui-se êste valor na outra equação do sistema; resolve-se a equação resultante e tem-se o valor de uma incógnita; substitui-se esta por seu valor na equação oriunda da primeira transformação efetuada, o que permite determinar o valor da segunda incógnita.* — Exemplos:

1.º Resolver o sistema

$$\begin{cases} 3x - 5y = 1 & (1) \\ 2x + 3y = 7. & (2) \end{cases}$$

Tirando o valor de x na primeira equação, vem

$$3x - 5y = 1$$

$$3x = 1 + 5y$$

$$x = \frac{1 + 5y}{3}. \qquad (3)$$

Substituindo êste valor na equação (2), encontramos

$$2\left(\frac{1 + 5y}{3}\right) + 3y = 7.$$

Efetuando o produto acima indicado, obtemos

$$\frac{2 + 10y}{3} + 3y = 7.$$

Resolvendo a equação acima, vem

$$2 + 10y + 9y = 21$$

$$10y + 9y = 21 - 2$$

$$19y = 19$$

$$y = \frac{19}{19}$$

$$y = 1.$$

Substituindo êste valor na equação (3), resulta

$$x = \frac{1+5}{3}$$

$$x = \frac{6}{3}$$

$$x = 2.$$

Obtemos, dêsse modo, a solução do sistema:

$$x = 2$$
$$y = 1.$$

2.º Resolver o sistema

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{x}{7} + \dfrac{y}{5} = 1\,\dfrac{3}{7} \\[2ex] x + \dfrac{y}{3} = 4\,\dfrac{2}{3}. \end{array}\right.$$

Preparando as equações, temos

$$5x + 7y = 50$$
$$3x + y = 14.$$

Tirando o valor de x na primeira, vem

$$x = \frac{50 - 7y}{5}. \qquad (1)$$

Substituindo, na segunda, x por êste valor, resulta

$$\frac{3\,(50 - 7y)}{5} + y = 14.$$

Resolvendo esta equação, encontramos

$$3\,(50 - 7y) + 5y = 70$$
$$150 - 21y + 5y = 70$$
$$-16y = -80$$
$$y = 5.$$

Substituindo, na equação (1), y por 5, obtemos

$$x = \frac{50 - 35}{5}$$

$$x = \frac{15}{5}$$

$$x = 3.$$

A solução do sistema proposto é, pois,

$$\left| \begin{array}{l} x = 3 \\ y = 5. \end{array} \right.$$

3.º Resolver o sistema

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = 2 \\[2ex] \dfrac{x}{3a} - \dfrac{y}{6b} = \dfrac{4}{3}. \end{array} \right.$$

Preparando as equações, vem

$$\left| \begin{array}{l} bx - ay = 2ab \\ 2bx - ay = 8ab. \end{array} \right. \qquad (1)$$

Tirando o valor de x na primeira, temos

$$x = \frac{2ab + ay}{b}.$$

Substituindo êste valor na segunda, resulta

$$\frac{2b\,(2ab + ay)}{b} - ay = 8ab$$

$$4ab + 2ay - ay = 8ab$$

$$y = 4b.$$

Substituindo y por êsse valor na primeira equação do sistema (1), encontramos

$$bx - 4ab = 2ab$$

$$x = 6a.$$

A solução do sistema proposto é, pois,

$$\begin{cases} x = 6a \\ y = 4b. \end{cases}$$

25. Eliminação por comparação. — Seja o sistema

$$A \begin{cases} 3x + 2y = 11 & (1) \\ 2x + 3y = 9. & (2) \end{cases}$$

Resolvendo essas equações em relação a x, vem

$$\begin{cases} 3x = 11 - 2y \\ 2x = 9 - 3y, \end{cases}$$

$$B \begin{cases} x = \dfrac{11 - 2y}{3} & (3) \\ x = \dfrac{9 - 3y}{2}. & (4) \end{cases}$$

Sendo iguais os primeiros membros das equações acima, podemos escrever

$$\frac{11 - 2y}{3} = \frac{9 - 3y}{2}. \qquad (5)$$

Com a primeira equação do sistema B e com a equação (5), formemos o sistema

$$C \begin{cases} x = \dfrac{11 - 2y}{3} & (6) \\ \dfrac{11 - 2y}{3} = \dfrac{9 - 3y}{2}, & (7) \end{cases}$$

que é equivalente ao primitivo e no qual a segunda equação contém apenas uma incógnita.

Resolvendo-a, encontraremos sucessivamente

$$\frac{11 - 2y}{3} = \frac{9 - 3y}{2}$$

$$2(11 - 2y) = 3(9 - 3y)$$

$$22 - 4y = 27 - 9y$$

$$-4y + 9y = 27 - 22$$

$$5y=5$$

$$y=\frac{5}{5}$$

$$y=1.$$

Substituindo, no sistema C, a equação (7) pelo valor acima, obtemos o sistema

$$D\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{11-2y}{3} \\ y=1. \end{array}\right.$$

Substituindo y por seu valor na primeira equação do sistema D, resulta

$$x=\frac{11-2y}{3}$$

$$x=\frac{11-2}{3}$$

$$x=\frac{9}{3}$$

$$x=3.$$

Obtemos, dêsse modo, a solução do sistema proposto

$$\left\{\begin{array}{l} x=3 \\ y=1. \end{array}\right.$$

Verificação: substituindo, nas equações do sistema A, x e y pelos valores obtidos, vem

$$3\times3+2\times1=11 \quad \text{ou} \quad 11=11$$
$$2\times3+3\times1=9 \quad \text{ou} \quad 9=9.$$

26. **Regra.** — *Para resolver um sistema de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas pelo método de comparação, preparam-se as equações, resolvem-se ambas em relação à mesma incógnita, como se a outra fôsse conhecida; igualam-se êstes valores; resolve-se a equação resultante e tem-se o valor de uma incógnita; substitui-se esta por seu*

valor em uma das equações oriundas da primeira transformação efetuada, o que permite determinar o valor da segunda incógnita. — Exemplos:

1.º Resolver o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=6 & (1) \\[2ex] \dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{8}=2. & (2) \end{cases}$$

Preparemos as equações. Eliminando os denominadores, temos

$$\begin{cases} 2x+3y=36 \\ 4x+3y=48. \end{cases}$$

Tirando o valor de x em cada uma das equações acima, vem

$$\begin{cases} 2x=36-3y \\ 4x=48-3y, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{36-3y}{2} & (3) \\[2ex] x=\dfrac{48-3y}{4}. & (4) \end{cases}$$

Igualando êstes valores, resulta

$$\frac{36-3y}{2}=\frac{48-3y}{4}. \qquad (5)$$

Resolvendo a equação supra, encontramos

$$2(36-3y)=48-3y$$
$$72-6y=48-3y$$
$$-3y=-24$$
$$y=8.$$

Substituindo êste valor na equação (3), obtemos

$$x=\frac{36-3\times 8}{2}$$

$$x = \frac{36 - 24}{2}$$

$$x = 6.$$

Obtemos, dêsse modo, a solução do sistema

$$\begin{cases} x = 6 \\ y = 8. \end{cases}$$

2.º Resolver o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{3} + x = 15 \\ \dfrac{x-y}{5} + y = 6. \end{cases}$$

Preparando as equações, vem

$$\begin{cases} 4x + y = 45 \\ x + 4y = 30. \end{cases}$$

Tirando em ambas o valor de y, temos

$$\begin{cases} y = 45 - 4x \\ y = \dfrac{30 - x}{4}. \end{cases}$$

Igualando êstes valores, resulta

$$45 - 4x = \frac{30 - x}{4}.$$

Resolvendo a equação acima, encontramos

$$180 - 16x = 30 - x$$

$$-15x = -150$$

$$x = 10.$$

Substituindo êste valor na primeira equação do sistema anterior, obtemos

$$y = 45 - 40$$

$$y = 5.$$

A solução do sistema proposto é, pois,

$$\begin{cases} x = 10. \\ y = 5. \end{cases}$$

3.º Resolver o sistema

$$\begin{cases} x + y = a + b \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 2. \end{cases}$$

Preparando as equações, vem

$$\begin{cases} x + y = a + b \\ bx + ay = 2ab. \end{cases}$$

Tirando em ambas, o valor de x, resulta

$$\begin{cases} x = a + b - y \\ x = \dfrac{2ab - ay}{b}. \end{cases}$$

Igualando êsses valores, temos

$$a + b - y = \frac{2ab - ay}{b},$$

$$ab + b^2 - by = 2ab - ay,$$

$$ay - by = 2ab - ab - b^2,$$

$$y(a - b) = ab - b^2,$$

$$y = \frac{ab - b^2}{a - b},$$

$$y = b.$$

Substituindo êsse valor em uma das equações do sistema primitivo, obtemos

$$x + b = a + b,$$

$$x = a.$$

A solução do sistema proposto é, pois,

$$\begin{cases} x = a \\ y = b. \end{cases}$$

27. **Eliminação por adição.** — Considerando o sistema

$$A \begin{cases} 5x + 3y = 19 & (1) \\ 7x - 2y = 8, & (2) \end{cases}$$

procuremos eliminar y. Para isso, multipliquemos a primeira equação por 2 e a segunda por 3. O sistema resultante, a saber

$$\begin{cases} 10x + 6y = 38 & (3) \\ 21x - 6y = 24, & (4) \end{cases}$$

é equivalente ao primitivo, mas os coeficientes de y nas duas equações que o constituem são números opostos.

Somando-as, membro a membro, vem

$$\begin{array}{l} 10x + 6y = 38 \\ \underline{21x - 6y = 24} \\ 31x \qquad = 62 \end{array}.$$

A equação obtida

$$31x = 62$$

é do primeiro grau com uma incógnita. Resolvendo-a encontramos

$$x = 2.$$

Com êste valor e a equação (1), formamos o sistema

$$\begin{cases} 5x + 3y = 19 & (5) \\ x = 2. & (6) \end{cases}$$

Substituindo x por seu valor na primeira das equações acima, temos

$$5 \times 2 + 3y = 19$$

$$10 + 3y = 19$$

$$3y = 19 - 10$$

$$3y = 9$$

$$y = 3.$$

Obtemos, dêsse modo, a solução do sistema

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3. \end{cases}$$

Voltando ao sistema primitivo

$$A \begin{cases} 5x + 3y = 19 & (1) \\ 7x - 2y = 8, & (2) \end{cases}$$

procuremos agora eliminar x. A fim de transformar o sistema supra em outro equivalente e no qual os coeficientes de x sejam números opostos, multipliquemos a primeira equação por 7, e a segunda por -5. Obtemos, assim, o sistema

$$B \begin{cases} 35x + 21y = 133 & (3) \\ -35x + 10y = -40. & (4) \end{cases}$$

Somando, membro a membro, as equações acima, vem

$$31y = 93.$$

Resolvendo a equação obtida, encontramos

$$y = 3.$$

Com êste valor e a equação (1) formamos o sistema

$$C \begin{cases} 5x + 3y = 19 & (5) \\ y = 3. & (6) \end{cases}$$

Substituindo, na equação (5), y por 3, temos

$$5x + 3 \times 3 = 19$$
$$5x + 9 = 19$$
$$5x = 19 - 9$$
$$5x = 10$$
$$x = 2.$$

Chegamos, dêsse modo, à solução do sistema

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3. \end{cases}$$

Verificação: substituindo, nas equações (1) e (2), x e y por seus valores, resulta

$$5 \times 2 + 3 \times 3 = 19 \quad \text{ou} \quad 19 = 19$$
$$7 \times 2 - 2 \times 3 = 8 \quad \text{ou} \quad 8 = 8.$$

28. **Regra.** — *Para resolver um sistema de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas pelo método de adição preparam-se as equações; multiplica-se cada uma por um número tal que os coeficientes da incógnita que se quer eliminar sejam, nas equações resultantes, números opostos; somam-se ambas e obtém-se uma equação do 1.º grau com uma incógnita; resolve-se esta; substitui-se o valor encontrado em uma das equações do sistema, determinando-se assim, o valor da outra incógnita.* — Exemplos:

1.º Resolver o sistema

$$\begin{cases} 7x + 3y = 36 & (1) \\ 4x + 5y = 37. & (2) \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por 5 e a segunda por -3, vem

$$\begin{cases} 35x + 15y = 180 \\ -12x - 15y = -111. \end{cases}$$

Somando ordenadamente, encontramos

$$23x = 69.$$

Resolvendo a equação supra, temos

$$x = 3.$$

Substituindo êste valor na equação (1), resulta

$$7 \times 3 + 3y = 36$$
$$21 + 3y = 36$$
$$3y = 36 - 21$$
$$3y = 15$$
$$y = 5.$$

Obtemos, dêsse modo, a solução do sistema

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 5. \end{cases}$$

2.º Resolver o sistema

$$\begin{cases} 9x + 7y = 43 & (1) \\ 6x - 5y = 19. & (2) \end{cases}$$

Não sendo primos entre si os coeficientes de x nas equações acima e devendo ser o coeficiente comum o mais simples possível, tomemos para o seu valor absoluto o mínimo múltiplo comum de 9 e 6.

Notando que

$$\text{m. m. c.}\,(9 \text{ e } 6) = 18$$

para igualar os valores absolutos dos coeficientes de x, bastará multiplicar a primeira equação por $18:9$ ou 2 e a segunda por $18:6$ ou 3. Por outro lado, como êstes devem ser números opostos, multipliquemos a segunda equação por -3. Resulta, assim

$$\begin{cases} 18x + 14y = 86 \\ -18x + 15y = -57. \end{cases}$$

Somando ordenadamente as equações acima, vem

$$29y = 29.$$

Resolvendo esta equação, encontramos

$$y = 1.$$

Substituindo êste valor na equação (1), temos

$$9x + 7 \times 1 = 43$$
$$9x + 7 = 43$$
$$9x = 36$$
$$x = 4.$$

Obtemos, dêsse modo, a solução do sistema

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 1. \end{cases}$$

3.º Resolver o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{4} + \dfrac{x-y}{2} = 3 \\[2ex] \dfrac{12x - 7y}{13} = 3. \end{cases} \qquad (1)$$

Preparando as equações, vem

$$\begin{cases} x+y+2x-2y=12 \\ 12x-7y=39, \end{cases} \qquad (2)$$

$$\begin{cases} 3x-y=12 \\ 12x-7y=39. \end{cases} \qquad (3)$$

Multiplicando a primeira equação por 7 e a segunda por -1, temos

$$\begin{cases} 21x-7y=84 \\ -12x+7y=-39. \end{cases} \qquad (4)$$

Somando ordenadamente as equações acima, resulta

$$9x=45,$$

$$x=5.$$

Substituindo x por 5 na primeira equação do sistema (3), encontramos

$$15-y=12,$$

$$-y=12-15,$$

$$-y=-3,$$

$$y=3.$$

A solução do sistema proposto é, pois,

$$\begin{cases} x=5 \\ y=3. \end{cases}$$

4.º Resolver o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a+b}+\dfrac{y}{a-b}=\dfrac{1}{a-b} \\ \dfrac{x}{a+b}-\dfrac{y}{a-b}=\dfrac{1}{a+b}. \end{cases} \qquad (1)$$

Preparando as equações, vem

$$\begin{array}{l} x(a-b)+y(a+b)=a+b \\ x(a-b)-y(a+b)=a-b. \end{array} \qquad (2)$$

Somando ordenadamente as equações acima, encontramos

$$2x(a-b)=2a.$$

$$x=\frac{a}{a-b}.$$

Substituindo x por seu valor na primeira equação do sistema (2), resulta

$$\frac{a}{a-b}(a-b)+y(a+b)=a+b$$

$$a+y(a+b)=a+b$$

$$y(a+b)=b$$

$$y=\frac{b}{a+b}.$$

A solução do sistema proposto é, pois,

$$\left|\begin{array}{l} x=\dfrac{a}{a-b} \\[2ex] y=\dfrac{b}{a+b}. \end{array}\right.$$

29. **Observação.** — Na resolução dos sistemas do primeiro grau com duas incógnitas, depois de conhecido o valor de uma delas pode-se determinar a segunda pela aplicação do próprio método usado na determinação da primeira raiz. Entretanto, na prática, geralmente se obtém por substituição o valor da segunda incógnita.

30. **EXERCÍCIOS.**

Resolver os sistemas seguintes:

1. $\left|\begin{array}{l} 5x+9y=23 \\ 7x+6y=19. \end{array}\right.$ R. $\left|\begin{array}{l} x=1 \\ y=2. \end{array}\right.$

2. $\left|\begin{array}{l} 3x-4y=2 \\ 7x-9y=7. \end{array}\right.$ R. $\left|\begin{array}{l} x=10 \\ y=7. \end{array}\right.$

3. $\left|\begin{array}{l} 5x+2y=26 \\ 6x+4y=36. \end{array}\right.$ R. $\left|\begin{array}{l} x=4 \\ y=3. \end{array}\right.$

4. $\begin{cases} 9x + 7y = 53 \\ 2x + 5y = 29. \end{cases}$ R. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 5. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x = 2y + 4 \\ 2x - 8y = 0. \end{cases}$ R. $\begin{cases} x = 8 \\ y = 2. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 5x - 4y = 0 \\ 2x + 3y = 23. \end{cases}$ R. $\begin{cases} x = 4 \\ y = 5. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x - 2 = y \\ x = 3y - 18. \end{cases}$ R. $\begin{cases} x = 3 \\ y = 7. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 5x - 6y = 82 \\ 3x + 5y = 59. \end{cases}$ R. $\begin{cases} x = 8 \\ y = 7. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 6x + 10y = 7 \\ 3x + 2y = 2. \end{cases}$ R. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ y = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 4x - 3y = 1 \\ 8x - 3y = 3. \end{cases}$ R. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 3(x - 1) = y + 1 \\ 2(x + 1) = y - 1. \end{cases}$ R. $\begin{cases} x = 7 \\ y = 17. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 5(x + 3) = 7(y - 4) \\ 6(x + 1) = 5(y - 3). \end{cases}$ R. $\begin{cases} x = 4 \\ y = 9. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4} = 9 \\ \dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{5} = 7. \end{cases}$ R. $\begin{cases} x = 12 \\ y = 20. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dfrac{x}{6} - \dfrac{y}{4} = 0 \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{6} = \dfrac{4}{3}. \end{cases}$ R. $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dfrac{x}{3} + 7y = 15 \\ \dfrac{x}{4} + 5y = 10. \end{cases}$ R. $\begin{cases} x = -60 \\ y = 5. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 3x + \dfrac{y}{6} = 16 \\ 4x - \dfrac{y}{3} = 18. \end{cases}$ R. $\begin{cases} x = 5 \\ y = 6. \end{cases}$

17. $\begin{cases} \dfrac{3x}{4} - \dfrac{y}{3} = \dfrac{5}{3} \\ \dfrac{2x}{3} + \dfrac{y}{2} = \dfrac{14}{3}. \end{cases}$ R. $\begin{cases} x = 4 \\ y = 4. \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dfrac{7x}{9} - \dfrac{y}{6} = 2 \\ \dfrac{5x}{12} - \dfrac{y}{8} = 1. \end{cases}$ R. $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2. \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dfrac{x+2}{5} + \dfrac{y}{4} = \dfrac{9}{4} \\ \dfrac{x-2}{6} - \dfrac{y}{9} = \dfrac{8}{9}. \end{cases}$ R. $\begin{cases} x = 8 \\ y = 1. \end{cases}$

20. $\begin{cases} \dfrac{x+1}{3} + \dfrac{y-1}{2} = 3 \\ \dfrac{x-2}{6} + \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{5}{2}. \end{cases}$ R. $\begin{cases} x = -1 \\ y = 7. \end{cases}$

21. $\begin{cases} \dfrac{x-7}{7} + \dfrac{y-6}{6} = 2 \\ \dfrac{x-2}{6} + \dfrac{y-4}{8} = 3. \end{cases}$ R. $\begin{cases} x = 14 \\ y = 12. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 2x + \dfrac{y-2}{5} = 21 \\ 4y + \dfrac{x-4}{6} = 29. \end{cases}$ R. $\begin{cases} x = 10 \\ y = 7. \end{cases}$

23. $\begin{cases} \dfrac{x+3}{5} + \dfrac{y-2}{9} = \dfrac{7}{3} \\ \dfrac{x-2}{10} + \dfrac{y+4}{12} = \dfrac{5}{4}. \end{cases}$ R. $\begin{cases} x = 7 \\ y = 5. \end{cases}$

24. $\begin{cases} \dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{5} = 2 \\ \dfrac{2x+1}{3} - \dfrac{y-3}{2} = 2. \end{cases}$ R. $\begin{cases} x = 4 \\ y = 5. \end{cases}$

25. $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{5} + \dfrac{3y+2}{3} = \dfrac{8}{3} \\ \dfrac{5x+2}{3} - \dfrac{2y+1}{6} = \dfrac{31}{6}. \end{cases}$ R. $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1. \end{cases}$

26. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{12} + \dfrac{x-y}{8} = \dfrac{11}{12} \\ \dfrac{x-y}{9} + \dfrac{x+y}{6} = \dfrac{14}{9}. \end{cases}$ R. $\begin{cases} x = 5 \\ y = 3. \end{cases}$

27. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{5} - \dfrac{x-y}{3} = -\dfrac{2}{5} \\ \dfrac{x-y}{2} + \dfrac{x+y}{10} = \dfrac{19}{5}. \end{cases}$ R. $\begin{cases} x = 7 \\ y = 1. \end{cases}$

28. $\begin{cases} \dfrac{3x}{4} + \dfrac{2y}{5} = \dfrac{4x}{3} - \dfrac{19y}{40} \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4} = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$ R. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$

29. $\begin{cases} \dfrac{2x+y}{6} - \dfrac{x+2y}{4} = -\dfrac{1}{12} \\ \dfrac{x-3y}{7} + \dfrac{2x-y}{6} = \dfrac{15}{7}. \end{cases}$ R. $\begin{cases} x = 7 \\ y = 2. \end{cases}$

30. $\begin{cases} \dfrac{2x-3y}{12} - \dfrac{2x-y}{9} = -\dfrac{5}{9} \\ \dfrac{5x-4y}{15} + \dfrac{4x-5y}{10} = \dfrac{32}{15}. \end{cases}$ R. $\begin{cases} x = 5 \\ y = 2. \end{cases}$

31. $\begin{cases} \dfrac{1}{3}(x-2) - \dfrac{1}{4}(y-3) = 0 \\ \dfrac{1}{2}(x+1) - \dfrac{1}{5}(y-2) = 2. \end{cases}$ R. $\begin{cases} x = 5 \\ y = 7. \end{cases}$

32. $\begin{cases} \dfrac{2x+3y}{5} - 2x = 4y - 8\,\dfrac{2}{5} \\ \dfrac{3x-y}{4} + \dfrac{x+2}{5} = y - 1\,\dfrac{3}{20}. \end{cases}$ R. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2. \end{cases}$

33. $\begin{cases} 3\left(\dfrac{x+3}{5}\right) - 2\left(\dfrac{y+6}{3}\right) + 4(x-y) = 25 \\ 5\left(\dfrac{x-9}{3}\right) + 6\left(\dfrac{y-1}{5}\right) - 2(x+y) = -25. \end{cases}$ R. $\begin{cases} x = 12 \\ y = 6. \end{cases}$

34. $\begin{cases} (a+c)x - by = bc \\ \dfrac{x}{b} + \dfrac{y}{a} = \dfrac{2x}{b}. \end{cases}$ R. $\begin{cases} x = b \\ y = a \end{cases}$

35. $\begin{cases} \dfrac{x}{3a} - \dfrac{y}{2b} + \dfrac{1}{6} = 0 \\ \dfrac{x-1}{a} - \dfrac{y-1}{b} = \dfrac{a-b}{ab}. \end{cases}$ R. $\begin{cases} x = a \\ y = b. \end{cases}$

31. Fórmulas de resolução. — Consideremos o sistema de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas sob a forma geral

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c'. \end{cases}$$

Resolvamos êsse sistema, aplicando o método de eliminação por adição.

Multiplicando a primeira equação por b' e a segunda por $-b$, vem

$$\begin{cases} ab'x + bb'y = cb' \\ -ba'x - bb'y = -bc'. \end{cases}$$

Somando ordenadamente as equações acima, obtemos

$$ab'x - ba'x = cb' - bc'.$$

Resolvendo essa equação, encontramos

$$x(ab' - ba') = cb' - bc'$$

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}.$$

Para obter o valor de y, voltemos ao sistema primitivo

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c', \end{cases}$$

a fim de eliminar x.

Multiplicando a primeira equação por $-a'$ e a segunda por a, vem

$$\begin{cases} -aa'x - ba'y = -ca' \\ aa'x + ab'y = ac'. \end{cases}$$

Somando ordenadamente, temos

$$ab'y - ba'y = ac' - ca'.$$

Resolvendo essa equação, encontramos

$$y(ab' - ba') = ac' - ca'$$

$$y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

Obtemos, assim, as fórmulas

$$\begin{cases} x = \dfrac{cb' - bc'}{ab' - ba'} \\[2ex] y = \dfrac{ac' - ca'}{ab' - ba'}, \end{cases}$$

as quais constituem a solução do sistema geral de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas.

32. Discussão. — Como vimos no parágrafo anterior a solução do sistema

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

é dada pelas fórmulas

$$\begin{cases} x = \dfrac{cb' - bc'}{ab' - ba'} \\[2ex] y = \dfrac{ac' - ca'}{ab' - ba'}. \end{cases}$$

Em relação ao denominador comum das frações acima, podemos admitir duas hipóteses:

I) $ab' - ba' \neq 0.$

II) $ab' - ba' = 0.$

Interpretemos, pois, os casos que se podem apresentar.

33. 1.º caso. — Sendo

$$ab' - ba' \neq 0,$$

o sistema admite uma única solução, dada pelas fórmulas

$$\begin{cases} x = \dfrac{cb' - bc'}{ab' - ba'} \\[2ex] y = \dfrac{ac' - ca'}{ab' - ba'}. \end{cases}$$

Neste caso, o sistema diz-se *determinado*.

34. 2.º caso. — Sendo

$$ab' - ba' = 0,$$

podemos formular as seguintes hipóteses:

$$\text{I)} \quad cb' - bc' \neq 0,$$

$$\text{II)} \quad cb' - bc' = 0.$$

No primeiro caso, em que o numerador da primeira fórmula é diferente de zero, o valor de x toma a forma

$$x = \frac{cb' - bc'}{0}.$$

Ademais, notemos que, quando um dos numeradores é diferente de zero, também o é o outro.

O sistema não tem, pois, solução, por isso que o valor de x é infinito.

No segundo caso, em que $cb' - bc' = 0$, temos

$$x = \frac{0}{0}.$$

Por outro lado, notemos que a nulidade do denominador comum e a de um dos numeradores acarreta a nulidade do outro numerador.

Com efeito, admitindo que

$$ab' - ba' = 0 \quad \text{e} \quad cb' - bc' = 0,$$

temos

$$ab' = ba' \quad \text{e} \quad cb' = bc' \qquad (1)$$

ou

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \quad \text{e} \quad \frac{c}{c'} = \frac{b}{b'},$$

de onde se deduz

$$\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'},$$

ou, ainda,

$$ac' = ca',$$

e, portanto,

$$ac' - ca' = 0.$$

Temos, então,

$$x = \frac{0}{0} \quad \text{e} \quad y = \frac{0}{0}.$$

Quaisquer valores de x e de y satisfazem, nesse caso, as equações do sistema. Por isso mesmo, o sistema diz-se *indeterminado*.

35. Resumo. — Designando por D o denominador comum das incógnitas e por N qualquer dos numeradores, poderemos resumir a discussão do sistema de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas do seguinte modo:

$D \neq 0$:		*o sistema admite uma única solução*
$D = 0$	$N \neq 0$:	*o sistema não tem solução*
	$N = 0$:	*o sistema admite infinidade de soluções*

36. Observações. — I. De acôrdo com as conclusões a que chegamos nos parágrafos anteriores, um sistema linear de duas equações com duas incógnitas é *determinado*, quando

$$ab' - ba' \neq 0,$$

isto é, quando

$$ab' \neq ba'.$$

Dividindo ambos os membros dessa relação por $a'b'$, vem

$$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}.$$

Assim, um sistema de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas admite uma única solução, quando a razão dos coeficientes de x é diferente da razão dos coeficientes de y.

II. Por outro lado, vimos que o sistema *não tem solução*, quando

$$ab' - ba' = 0$$

$$cb' - bc' \neq 0.$$

Da primeira relação, tiramos

$$ab' = ba'$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}. \qquad (1)$$

Da segunda, tiramos

$$bc' \neq cb'$$

$$\frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}. \qquad (2)$$

Comparando as relações (1) e (2), podemos escrever

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}.$$

Assim, um sistema de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas não admite solução, quando a razão dos coeficientes de x é igual à razão dos coeficientes de y e diferente da razão dos têrmos independentes.

III. Finalmente, vimos que o sistema é *indeterminado*, quando

$$ab' - ba' = 0$$

$$cb' - bc' = 0.$$

Da primeira relação, tiramos

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}. \qquad (3)$$

Da segunda, tiramos

$$\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}. \qquad (4)$$

Comparando as relações (3) e (4), vem

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

Assim, um sistema de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas admite infinidade de soluções, quando a razão dos coeficientes de x é igual à razão dos coeficientes de y e à razão dos têrmos independentes.

37. Exercícios. — 1.º *Dado o sistema*

$$\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ 4x + 3y = 17, \end{cases}$$

verificar, sem resolvê-lo, se admite solução.

Formando a razão dos coeficientes de x e a dos coeficientes de y, encontramos

$$\frac{a}{a'} = \frac{3}{4}, \quad \frac{b}{b'} = \frac{2}{3}.$$

Como essas razões são diferentes, segue-se que o sistema dado admite uma única solução.

2.º *Determinar os valores que se devem dar a* m *e* n *para que o sistema*

$$\begin{cases} 3x - 5y = m \\ 6x - ny = 10 \end{cases}$$

admita infinidade de soluções.

Para que o sistema seja indeterminado, é necessário e suficiente que

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

No caso presente, temos

$$\frac{3}{6} = \frac{-5}{-n} = \frac{m}{10}.$$

Da igualdade das duas primeiras razões, deduzimos

$$-3n = -30$$
$$n = 10.$$

Considerando, agora, a primeira razão e a terceira, vem

$$6m = 30$$
$$m = 5.$$

38. **Exercícios propostos.**

1. Determinar os valores que se devem atribuir a m para que o sistema

$$\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 6x - my = 9 \end{cases}$$

admita uma única solução. R. $m \neq 4$.

2. Qual o valor que se deve dar a m para que o sistema

$$\begin{cases} mx - 8y = 20 \\ 5x - 4y = 11 \end{cases}$$

tenha uma única solução? R. $m \neq 10$.

3. Que valor se deve dar a m para que o sistema

$$\begin{cases} 4x + 6y = m \\ 6x + 9y = 12 \end{cases}$$

seja indeterminado? R. $m = 8$.

4. Determinar os valores que se devem atribuir a m e n para que o sistema

$$\begin{cases} mx - 12y = 15 \\ 12x - 16y = n \end{cases}$$

seja indeterminado. R. $\begin{cases} m = 9 \\ n = 20. \end{cases}$

5. Que valores se devem dar a m e n para que o sistema

$$\begin{cases} mx + ny = 5 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$$

seja indeterminado? R. $\begin{cases} m = 15 \\ n = -10. \end{cases}$

39. Resolução gráfica de um sistema de duas equações com duas incógnitas. — Seja o sistema

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x - y = 2. \end{cases}$$

Representemos gràficamente as retas correspondentes a cada uma das equações supra.

Resolvendo, relativamente a y, a equação

$$x + y = 7,$$

encontramos

$$y = 7 - x.$$

Para $x = 0$, temos

$$y = 7.$$

Para $x = 7$, resulta

$$y = 0.$$

Representemos, pois, os pontos A e B, definidos pelas coordenadas

$$A(0;7) \quad \text{e} \quad B(7;0).$$

Ligando os pontos A e B por um traço contínuo, obtemos o gráfico da primeira equação do sistema dado.

Resolvendo, relativamente a y a equação

$$2x - y = 2,$$

encontramos

$$-y = 2 - 2x$$

$$y = 2x - 2.$$

Para $x=0$, temos

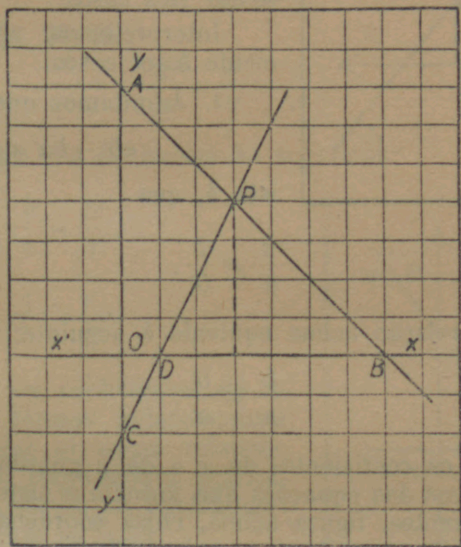
$$y=-2.$$

Para $x=1$, resulta

$$y=0.$$

Representemos, pois, os pontos C e D, definidos pelas coordenadas

$$C\,(0,-2) \quad \text{e} \quad D\,(1;0).$$



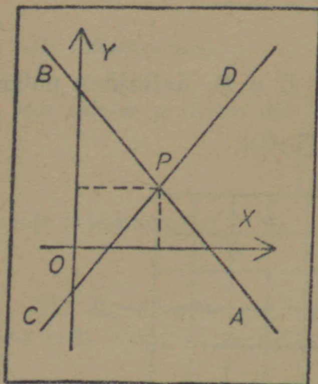
Ligando os pontos C e D por um traço contínuo, obtemos o gráfico da segunda equação do sistema dado.

Prolongadas suficientemente, as retas AB e CD se encontrarão no ponto P.

Ora, entre a infinidade de pontos de cada uma dessas retas, apenas é comum a elas o ponto P. E, pertencendo êsse ponto simultâneamente às retas AB e CD, segue-se que as suas coordenadas, satisfazem ambas as equações dadas. Conseqüentemente, ditas coordenadas constituem a solução do sistema proposto, a saber,

$$\begin{cases} x=3 \\ y=4. \end{cases}$$

40. Interpretação gráfica da solução. — Consideremos o sistema geral de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas



$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c'. \end{cases}$$

Ao tratar da discussão dêsse sistema, vimos que se podem apresentar três casos.

Interpretemos, agora, gràficamente êsses casos.

I. Admitamos que

$$ab' - ba' \neq 0,$$

isto é, que

$$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}.$$

Mas, a relação acima equivale à seguinte:

$$\frac{b}{a} \neq \frac{b'}{a'}.$$

Quando os coeficientes de x e de y guardam essa relação, os gráficos das equações que formam o sistema são duas retas concorrentes, figura acima, cujas coordenadas do ponto de interseção constituem a única solução do sistema.

II. Admitamos, agora, que

$$ab' - ba' = 0$$

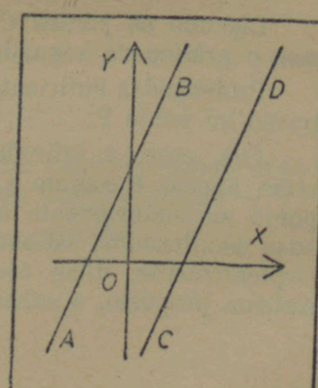
$$cb' - bc' \neq 0,$$

isto é, que (n. 36, II)

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'},$$

relações essas que equivalem às seguintes:

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \quad \text{e} \quad \frac{c}{b} \neq \frac{c'}{b'}.$$



Quando os coeficientes de x, de y e os têrmos independentes guardam essas relações, os gráficos das equações que formam o sistema são duas retas paralelas, figura anterior.

Como essas retas não têm ponto comum, segue-se que o sistema, no caso considerado, não admite solução.

III. Admitamos, finalmente, que

$$ab' - ba' = 0$$

$$cb' - bc' = 0,$$

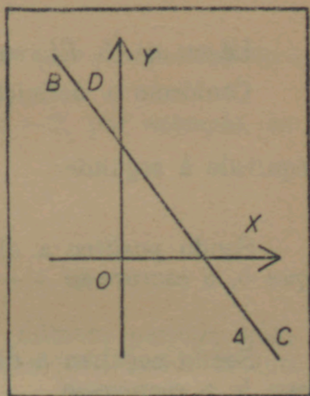
isto é, que (n. 36, III)

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'},$$

relações essas que equivalem às seguintes:

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'},$$

$$\frac{c}{b} = \frac{c'}{b'}.$$



Quando os coeficientes de x, de y e os têrmos independentes guardam entre si essas relações, as retas que representam gràficamente as equações se confundem: AB e CD, figura ao lado.

As retas consideradas têm nesse caso infinidade de pontos comuns. Logo, o sistema é indeterminado.

CAPÍTULO III

RESOLUÇÃO DE DESIGUALDADES DO 1.º GRAU COM UMA OU DUAS INCÓGNITAS

41. **Definições.** — Diz-se que dois números relativos são *desiguais* quando a diferença entre êles não é nula.

A relação de desigualdade entre dois números relativos a e b é indicada do modo seguinte:

$$a - b \neq 0.$$

Lê-se: $a - b$ *diferente de* zero.

Conforme a definição, a relação

$$a - b \neq 0$$

equivale à seguinte:

$$a \neq b.$$

Sendo *positiva* a diferença $a - b$, diz-se que a é *maior que* b, e escreve-se

$$a > b.$$

Sendo negativa a diferença $a - b$, diz-se que a é *menor que* b, e escreve-se

$$a < b.$$

42. **Conseqüências.** — Das definições adotadas, decorrem as seguintes conseqüências:

I. *Dados dois números positivos, o maior é o que tem maior valor absoluto.*

Com efeito, dados, por exemplo, os números positivos 7 e 5, resulta evidentemente que

$$+7 > +5,$$

uma vez que

$$+7 - 5 = +2.$$

Em geral, dados os números positivos a e b, e sendo o valor absoluto de a maior que o de b, temos

$$+a > +b.$$

II. *Qualquer número positivo é maior que zero.*

Considerando, por exemplo, o número positivo 5, verificamos que

$$+5 > 0,$$

por isso que

$$+5 - 0 = +5.$$

Em geral, designando por a um número positivo qualquer, temos

$$+a > 0.$$

III. *Todo número positivo é maior que qualquer número negativo.*

De feito, dados os número $+1$ e -9, por exemplo, segue-se que

$$+1 > -9,$$

uma vez que

$$+1 - (-9) = +1 + 9 = +10.$$

Em geral, designando por a um número positivo qualquer e por b um número negativo qualquer, temos sempre

$$+a > -b.$$

IV. *Qualquer número negativo é menor que zero.*

Considerando, por exemplo, o número negativo -5, fàcilmente verificamos que

$$-5 < 0,$$

de vez que

$$-5 - 0 = -5.$$

Em geral, designando por a um número negativo qualquer, temos

$$-a < 0.$$

V. *Dados dois números negativos, o maior é o que tem menor valor absoluto.*

Com efeito, dados, por exemplo, os números negativos -5 e -7, resulta evidentemente que

$$-5>-7,$$

uma vez que

$$-5-(-7)=-5+7=+2.$$

De maneira geral, dados os números negativos $-a$ e $-b$, e sendo o valor absoluto de a menor que o de b, temos

$$-a>-b.$$

43. **Observação.** — De acôrdo com as conseqüências II e IV, servindo-nos dos sinais *maior que* e *menor que* podemos representar os números positivos e negativos.

Assim é que um número positivo qualquer, a, pode ser representado assim

$$a>0.$$

Por outro lado, para indicar que um número b é negativo, podemos escrever

$$b<0.$$

44. **Desigualdades.** — As relações da forma

$$a>b \quad \text{e} \quad m<n$$

denominam-se *desigualdades.*

Na desigualdade

$$a>b,$$

a é o primeiro membro e b o segundo.

45. **Sentido das desigualdades.** — Duas desigualdades dizem-se *do mesmo sentido* quando em ambas o primeiro membro é maior que o segundo, ou quando em ambas o primeiro membro é menor que o segundo.

Assim, as desigualdades

$$a+b>0$$

$$3x+1>2x-3$$

são do mesmo sentido.

Pelo mesmo motivo, são ainda do mesmo sentido as desigualdades

$$ab+ac+bc<a+b+c$$

$$8x+3<4x+50.$$

No caso oposto ao considerado, diz-se que as desigualdades são de *sentido contrário*. — Exemplo:

$$4x-8>3x-1$$

$$3x-7<5x+1.$$

46. **Mudança de sentido.** — Quando uma desigualdade passa da forma

$$a<b$$

para a forma

$$a'>b',$$

diz-se que *mudou de sentido.*

47. **Propriedades das desigualdades.** — As desigualdades apresentam várias propriedades, das quais estudaremos as principais e que maior interêsse oferecem ao desenvolvimento da matéria tratada neste curso.

48. **Primeira propriedade.** — *Uma desigualdade não muda de sentido quando se lhe soma ou subtrai a ambos os membros o mesmo número.*

Seja a desigualdade

$$a>b.$$

Sendo a maior que b, temos (n. 41)

$$a-b>0.$$

Somando ao primeiro membro da desigualdade os números opostos $+m$ e $-m$, não lhe alteramos o valor. — Portanto:

$$a-b+m-m>0.$$

Alterando a ordem dos têrmos acima, podemos escrever

$$a+m-b-m>0,$$

ou, servindo-nos de parênteses,

$$a+m-(b+m)>0.$$

Ora, sendo positiva a diferença $(a+m)-(b+m)$, segue-se, por definição, que

$$a+m>b+m.$$

De modo análogo, demonstra-se também a segunda parte do enunciado.

49. **Conseqüência.** — *Uma desigualdade não muda de sentido se lhe passarmos qualquer têrmo de um para outro membro, com o sinal trocado.*

Efetivamente, seja a desigualdade

$$a+m>b.$$

Subtraindo m de ambos os membros, vem

$$a+m-m>b-m,$$

ou, reduzindo os têrmos semelhantes,

$$a>b-m.$$

50. **Segunda propriedade.** — *Uma desigualdade não muda de sentido se lhe multiplicarmos ou dividirmos ambos os membros por um mesmo número positivo e diferente de zero.*

Seja

$$a>b.$$

Por definição (n. 41), temos

$$a-b>0.$$

Multiplicando a diferença $a-b$, que é positiva, por qualquer número positivo, m, o resultado a que se chega é, ainda, positivo.

Por isso mesmo, podemos escrever

$$(a-b)\,m>0,$$

ou, efetuando o produto indicado,

$$am-bm>0.$$

Transpondo o têrmo bm para o segundo membro, vem

$$am>bm.$$

De modo análogo, demonstra-se também a segunda parte do enunciado.

51. **Terceira propriedade.** — *A desigualdade muda de sentido se lhe multiplicarmos ou dividirmos ambos os membros por um mesmo número negativo.*

De feito, seja a desigualdade

$$a>b,$$

de onde tiramos

$$a-b>0.$$

Multiplicando a diferença $a-b$, que é positiva, por qualquer número negativo, o resultado a que se chega é negativo. Sendo, portanto, m um número negativo, evidentemente

$$(a-b)\,m<0,$$

ou, efetuando o produto indicado,

$$am-bm<0.$$

Transpondo bm para o segundo membro, temos

$$am<bm.$$

De modo análogo, demonstra-se também a segunda parte do enunciado.

52. **Conseqüências.** — Entre outras conseqüências, decorrem das duas últimas propriedades estudadas as seguintes:

I. *Quando uma desigualdade encerra têrmos fracionários, podem ser suprimidos os seus denominadores comuns.*

Efetivamente, seja a desigualdade

$$\frac{a}{b}+c>\frac{d}{m}.$$

Sendo *positivo* o mínimo múltiplo comum dos denominadores, bm, por êle podemos multiplicar todos os têrmos da desigualdade, sem alterá-la.

Assim procedendo, encontramos

$$\frac{abm}{b} + bcm > \frac{bdm}{m},$$

ou, eliminando os fatôres comuns aos têrmos das frações acima,

$$am + bcm > bd.$$

Entretanto, quando o m. m. c. dos denominadores é *negativo*, ou, sendo literal, não se lhe conheça o sinal, há mister multiplicar os têrmos da desigualdade pelo quadrado do m. m. c. dos denominadores.

II. *Podem-se trocar os sinais de todos os têrmos de uma desigualdade, contanto que se lhe inverta o sentido.*

Seja a desigualdade

$$a + c > d + m.$$

Para mudar os sinais de todos os seus têrmos, devemos multiplicar ambos os membros da desigualdade por -1.

Como, em virtude da III.ª propriedade, a desigualdade muda nesse caso de sentido, evidentemente

$$-a - c < -d - m.$$

53. **Quarta propriedade.** — *Somando duas ou mais desigualdades do mesmo sentido, obtém-se uma desigualdade do mesmo sentido que as consideradas.*

Sejam as desigualdades

$$a > b$$
$$c > d$$
$$m > n.$$

Por definição (n.º 41), temos

$$a - b > 0$$
$$c - d > 0$$
$$m - n > 0.$$

Sendo positivas as diferenças que se encontram nos primeiros membros das desigualdades acima, segue-se que a sua soma também é positiva. Portanto

$$a-b+c-d+m-n>0.$$

Passando para o segundo membro os têrmos negativos, vem

$$a+c+m>b+d+n.$$

54. **Quinta propriedade.** — *Subtraindo uma desigualdade de outra de sentido contrário, obtém-se nova desigualdade do mesmo sentido da que se tomou como minuendo.*

Sejam as desigualdades

$$a>b$$
$$c<d.$$

Por definição (n.º 41), temos

$$a-b>0$$
$$d-c>0.$$

Aplicando, às desigualdades acima, a IV.ª propriedade (n. 53), encontramos

$$a-b+d-c>0.$$

Transpondo para o segundo membro os têrmos $-b$ e d, vem

$$a-c>b-d,$$

conforme queríamos demonstrar.

55. **Observação.** — Ao terminar o estudo das principais propriedades das desigualdades cumpre-nos notar que:

a) *as desigualdades de sentido contrário não podem ser somadas;*

b) *as desigualdades de mesmo sentido não podem ser subtraídas.*

56. **Desigualdades condicionais.** — Em analogia à distinção estabelecida entre as igualdades, distinguem-se também em duas espécies as desigualdades.

Com efeito, dada a desigualdade

$$a^2 + b^2 > ab,$$

fácil é verificar que, para qualquer sistema de valores atribuído às letras que nela figuram, o primeiro membro será sempre maior que o segundo.

Diz-se, por isso, que quaisquer valores de a e b *satisfazem* a desigualdade considerada.

Seja agora, a desigualdade

$$3x + 2 < 5x + 7,$$

na qual figura a incógnita x.

E' bem de ver que nem todos os valores de x satisfazem essa desigualdade.

Para citar apenas um exemplo, vejamos que a desigualdade acima não é satisfeita quando se faz x igual a -5.

De feito, calculando os valores numéricos de ambos os membros para $x = -5$, encontramos

$$3x + 2 = 3 \times (-5) + 2 = -13,$$
$$5x + 7 = 5 \times (-5) + 7 = -18.$$

E, como sabemos (n. 42) ser

$$-13 > -18,$$

infere-se que a desigualdade considerada não se verifica para

$$x = -5.$$

Para distinguir os dois tipos de desigualdade, diz-se que a expressão

$$a^2 + b^2 > ab$$

é simplesmente uma desigualdade, e que a expressão

$$3x + 2 < 5x + 7$$

é uma desigualdade condicional ou uma *inequação*.

57. **Inequações.** — *Inequação* é a desigualdade que sòmente se verifica para determinados valores de certas letras que nela se contêm, letras que se denominam incógnitas.

Os valores da incógnita que verificam uma inequação denominam-se *soluções*.

As inequações que admitem as mesmas soluções dizem-se *equivalentes.*

As inequações classificam-se como as equações, segundo o grau e o número de incógnitas que contêm.

Além disso, as inequações podem ser racionais ou irracionais, inteiras ou fracionárias, etc.

58. **Resolução das inequações.** — *Resolver* uma inequação significa determinar as suas soluções.

Sendo extensivas às inequações as propriedades das desigualdades, nelas se fundam as transformações por que passam as inequações nas diversas fases de sua resolução.

As inequações do 1.º grau com uma incógnita, contendo exclusivamente têrmos da primeira potência da variável e independentes, podem ser postas sob a forma

$$ax + b > 0$$

$$ax + b < 0,$$

em que a é sempre positivo.

Aplicando as propriedades das desigualdades, resolvamos a inequação

$$ax + b > 0.$$

Transpondo o têrmo independente para o segundo membro, vem

$$ax > -b.$$

Dividindo ambos os membros pelo coeficiente de x, obtemos

$$x > -\frac{b}{a}.$$

Resolvamos, agora, a inequação

$$ax + b < 0.$$

Transpondo b para o segundo membro, resulta

$$ax < -b.$$

Dividindo ambos os membros por a, encontramos

$$x < -\frac{b}{a}.$$

59. Exercícios. — 1.º *Resolver a inequação*

$$7x - 1 > 3x + 11.$$

Transpondo os têrmos, vem

$$7x - 3x > 11 + 1.$$

Reduzindo os têrmos semelhantes, obtemos

$$4x > 12.$$

Dividindo ambos os membros pelo coeficiente da incógnita, encontramos

$$x > \frac{12}{4}$$

$$x > 3.$$

Significa a solução obtida que qualquer número maior que 3 satisfaz a inequação proposta.

2.º *Resolver a inequação*

$$\frac{x}{2} + 1 < \frac{x}{3} + 5.$$

Para eliminar os denominadores, multipliquemos todos os têrmos da inequação por 6, que é o m. m. c. de 2 e 3, e simplifiquemos:

$$3x + 6 < 2x + 30.$$

Transpondo os têrmos, vem

$$3x - 2x < 30 - 6.$$

Reduzindo os têrmos semelhantes, obtemos

$$x < 24.$$

Significa a solução obtida que qualquer número menor que 24 satisfaz a inequação proposta.

3.º *Resolver a inequação*

$$\frac{x}{5} - \frac{1}{2} > \frac{x}{2} - \frac{1}{3}.$$

Eliminando os denominadores, vem

$$6x - 15 > 15x - 10.$$

Transpondo os têrmos, obtemos

$$6x - 15x > -10 + 15.$$

Reduzindo os têrmos semelhantes, resulta

$$-9x > 5.$$

Multiplicando por -1, ambos os membros da inequação supra e invertendo-lhe o sinal, encontramos

$$9x < -5,$$

ou, dividindo ambos os membros pelo coeficiente da incógnita,

$$x < -\frac{5}{9}.$$

Significa a solução obtida que qualquer número menor que $-\frac{5}{9}$ satisfaz a inequação proposta

4.º *Resolver a inequação*

$$\frac{2x-1}{6} - \frac{x}{3} > \frac{x+1}{9} - \frac{3}{2}.$$

Eliminando os denominadores, vem

$$3(2x-1) - 6x > 2(x+1) - 27$$
$$6x - 3 - 6x > 2x + 2 - 27.$$

Transpondo os têrmos, obtemos

$$6x - 6x - 2x > 2 - 27 + 3.$$

Reduzindo os têrmos semelhantes, resulta

$$-2x > -22.$$

Multiplicando por -1 ambos os membros da inequação supra e invertendo-lhe o sinal, encontramos

$$2x < 22,$$

ou, dividindo ambos os membros pelo coeficiente da incógnita,

$$x < \frac{22}{2}$$

$$x < 11.$$

Significa a solução obtida que qualquer número menor que 11 satisfaz a inequação proposta.

60. Sistemas de inequações. — Duas ou mais inequações constituem um *sistema* quando devem ser verificadas para os mesmos valores das incógnitas.

Neste capítulo, estudaremos os sistemas de inequações do 1.º grau com uma e duas incógnitas.

Resolver um sistema de inequações significa determinar as suas soluções comuns.

Examinemos, nos exemplos que seguem, os três casos que se nos podem apresentar, na resolução dos sistemas com uma incógnita.

61. **1.º caso.** — Resolver o sistema

$$\begin{cases} 3x+3> x+9 \\ 5x-7>2x+5. \end{cases}$$

De cada uma das inequações acima, deduzimos, sucessivamente,

$$\begin{array}{c|c} 3x-x>9-3 & 5x-2x>5+7 \\ 2x>6 & 3x>12 \\ x>3. & x>4. \end{array}$$

Evidentemente, devemos tomar

$$x>4,$$

pois forçosamente todos os valores maiores que 4 satisfazem simultâneamente as inequações consideradas. A êsse valor tomado chama-se *limite inferior* das soluções do sistema.

62. **2.º caso.** — Resolver o sistema

$$\begin{cases} 5x-4<3x+8 \\ 3+2x<9-4x. \end{cases}$$

De cada uma das inequações acima, deduzimos, sucessivamente,

$$\begin{array}{c|c} 5x-3x<8+4 & 2x+4x<9-3 \\ 2x<12 & 6x<6 \\ x<6. & x<1. \end{array}$$

Tendo em vista as soluções encontradas, segue-se que se deverá tomar

$$x<1,$$

pois, sendo x menor que 1, será forçosamente menor que 6. Ao valor tomado, 1, chama-se *limite superior* das soluções do sistema.

63. 3.º caso. — Resolver o sistema

$$\begin{cases} 4(x-1)>3(x+1) \\ 3(x-5)<2(x-3). \end{cases}$$

De cada uma das inequações acima, deduzimos, sucessivamente

$$\begin{array}{c|c} 4x-4>3x+3 & 3x-15<2x-6 \\ 4x-3x>3+4 & 3x-2x<-6+15 \\ x>7. & x<9. \end{array}$$

E' bem de ver que se deverá tomar para x qualquer valor compreendido entre 7 e 9, a saber,

$$7<x<9.$$

Ao valor 7, dá-se a denominação de *limite inferior* e a 9 chama-se *limite superior* das soluções.

64. Exercícios. — 1.º *Resolver o sistema*

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3}+\dfrac{1}{2}>\dfrac{x}{6}+\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{x}{3}-\dfrac{3}{20}>\dfrac{x}{5}+\dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Das inequações supra, deduzimos

$$\begin{array}{c|c} 2x+3>x+4 & 20x-9>12x+15 \\ 2x-x>4-3 & 20x-12x>15+9 \\ x>1. & x>3. \end{array}$$

Apresentando as inequações propostas limites inferiores para x, devemos tomar o maior, a saber,

$$x>3.$$

2.º *Resolver o sistema*

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{2}+3<5-\dfrac{x+1}{3} \\ \dfrac{x+2}{2}-\dfrac{1}{4}<\dfrac{1}{3}+\dfrac{x+3}{6}. \end{cases}$$

Das inequações acima, deduzimos

$$\begin{array}{c|c} 3(x-1)+18<30-2(x+1) & 6(x+2)-3<4+2(x+3) \\ 3x-3+18<30-2x-2 & 6x+12-3<4+2x+6 \\ 3x+2x<30-2+3-18 & 6x-2x<4+6-12+3 \\ 5x<13 & 4x<1 \\ x<\frac{13}{5}. & x<\frac{1}{4}. \end{array}$$

Apresentando as inequações propostas dois limites superiores para x, devemos tomar o menor, a saber,

$$x<\frac{1}{4}.$$

3.º *Resolver o sistema*

$$\begin{cases} \dfrac{4x-9}{7}<x-3 \\ \dfrac{3x+10}{4}>2x-5. \end{cases}$$

Das inequações acima, deduzimos

$$\begin{array}{c|c} 4x-9<7x-21 & 3x+10>8x-20 \\ 4x-7x<-21+9 & 3x-8x>-20-10 \\ -3x<-12 & -5x>-30 \\ 3x>12 & 5x<30 \\ x>4. & x<6. \end{array}$$

Em vista do resultado obtido, deve-se tomar para x os valores compreendidos entre 4 e 6, a saber,

$$4<x<6.$$

65. **Inequações incompatíveis.** — Diz-se que duas inequações são *incompatíveis* quando não admitem solução comum.

Como exemplo, consideremos as inequações

$$2x-3>x+2 \quad \text{e} \quad 2x+1>3x-2.$$

Resolvendo-as, encontramos, respectivamente,

$$x>5 \quad \text{e} \quad x<3.$$

Verificamos, dessarte, que as inequações acima não admitem solução comum, de vez que a primeira se verifica sòmente para valores de x maiores que 5, e a segunda para valores de x menores que 3.

66. Sistemas de inequações com duas incógnitas. — Na resolução dos sistemas de duas inequações do 1.º grau com duas incógnitas podem ser considerados dois casos, segundo o sentido dos limites obtidos para a incógnita em relação à qual se resolvem as inequações.

No primeiro caso, os limites são de sentidos contrários; no segundo caso, os limites são do mesmo sentido.

67. 1.º caso. — Resolver o sistema

$$\begin{cases} 3x - 2y - 5 < 0 \\ 3y - 6x + 7 < 0. \end{cases}$$

Resolvendo a primeira inequação em relação a x, encontramos

$$3x - 2y - 5 < 0$$

$$3x < 2y + 5$$

$$x < \frac{2y+5}{3}. \qquad (1)$$

Resolvendo a segunda inequação em relação a x, obtemos

$$3y - 6x + 7 < 0$$

$$-6x < -3y - 7$$

$$6x > 3y + 7$$

$$x > \frac{3y+7}{6}. \qquad (2)$$

Comparando as relações (1) e (2), vem

$$\frac{3y+7}{6} < x < \frac{2y+5}{3} \qquad (3)$$

ou, simplesmente,

$$\frac{3y+7}{6} < \frac{2y+5}{3}.$$

Resolvendo essa inequação em relação a y, obtemos

$$3y + 7 < 4y + 10$$

$$3y - 4y < 10 - 7$$

$$-y < 3$$

$$y > -3.$$

Verifica-se, assim, que podem ser atribuídos a y quaisquer valores maiores que -3.

A cada valor de y correspondem valores de x determinados pela relação (3)

$$\frac{3y+7}{6} < x < \frac{2y+5}{3}.$$

Fazendo $y=0$, por exemplo, temos

$$\frac{7}{6} < x < \frac{5}{3}.$$

Assim, para $y=0$, as desigualdades dadas verificam-se para qualquer valor de x compreendido entre

$$\frac{7}{6} \quad \text{e} \quad \frac{5}{3}.$$

Fazendo $y=1$, encontramos

$$\frac{10}{6} < x < \frac{7}{3},$$

e assim, sucessivamente.

68. **2.º caso.** — Sejam as inequações

$$\begin{cases} 3x-2y>2 \\ 2x+3y>6. \end{cases}$$

Resolvendo a primeira inequação em relação a x, encontramos

$$3x>2y+2$$

$$x>\frac{2y+2}{3}. \qquad (1)$$

Resolvendo a segunda em relação a x, vem

$$2x+3y>6$$

$$2x>6-3y$$

$$x>\frac{6-3y}{2}. \qquad (2)$$

Como as desigualdades (1) e (2) são do mesmo sentido, podemos admitir duas hipóteses:

I. $$\frac{2y+2}{3} > \frac{6-3y}{2}.$$

II. $$\frac{2y+2}{3} < \frac{6-3y}{2}.$$

Considerando a primeira hipótese, temos

$$\frac{2y+2}{3} > \frac{6-3y}{2}$$

$$4y+4 > 18-9y$$

$$4y+9y > 18-4$$

$$13y > 14$$

$$y > \frac{14}{13}.$$

As inequações dadas verificam-se, neste caso, para

$$y > \frac{14}{13} \quad \text{e} \quad x > \frac{2y+2}{3}.$$

Na segunda hipótese, temos

$$\frac{2y+2}{3} < \frac{6-3y}{2}$$

$$4y+4 < 18-9y$$

$$4y+9y < 18-4$$

$$13y < 14$$

$$y < \frac{14}{13}.$$

As inequações dadas verificam-se, neste caso, para

$$y < \frac{14}{13} \quad \text{e} \quad x > \frac{6-3y}{2}.$$

69. EXERCICIOS.

Resolver as inequações seguintes:

1. $4x - 8 < 3x - 1$. R. $x < 7$.

2. $5x + 21 > 7x + 12$. R. $x < \frac{9}{2}$.

3. $3(x - 1) + x < 2(x + 2)$. R. $x < \frac{7}{2}$.

4. $2(x + 7) - 3(x + 1) < x + 5$. R. $x > 3$.

5. $\frac{7x}{2} - 8 > \frac{x}{3} + 11$. R. $x > 6$.

6. $\frac{x}{3} - \frac{x}{4} < \frac{x}{2} + \frac{1}{3}$. R. $x > -\frac{4}{5}$.

7. $\frac{5x + 10}{8} < \frac{22 + 7x}{12}$. R. $x < 14$.

8. $\frac{x - 2}{5} + \frac{x - 1}{4} > \frac{2}{3}$. R. $x > \frac{79}{27}$.

9. $\frac{x}{4} - \frac{x}{6} + \frac{1}{3} < \frac{x + 2}{9}$. R. $x > 4$.

10. $\frac{x - 1}{12} + \frac{x + 1}{9} - \frac{5}{6} < \frac{x}{4} + \frac{1}{3}$. R. $x > -\frac{41}{2}$.

Resolver os sistemas seguintes:

11. $2x + 1 > x + 3$ e $5x - 2 > 2x + 7$. R. $x > 3$.

12. $10x + 2 < 3x + 30$ e $2x - 4 < 1 - 3x$. R. $x < 1$.

13. $3(x + 1) < 5(x - 1)$ e $5(2x - 1) < 3(3x + 1)$. R. $4 < x < 8$.

14. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} > x - 1$ e $\frac{x - 2}{3} + \frac{1}{2} > x - 2$. R. $x < \frac{11}{4}$.

15. $\frac{3 - x}{2} - 1 < \frac{5 - 2x}{3}$ e $\frac{2x - 3}{4} - \frac{5 + x}{6} < 0$. R. $x < \frac{19}{4}$.

Capítulo IV

PROBLEMAS DO 1.º GRAU

70. **Definições.** — *Problema* é tôda questão em que se procura determinar uma ou várias quantidades desconhecidas, denominadas *incógnitas*, ligadas por certas relações a outras conhecidas e chamadas *dados*.

Resolver um problema significa determinar o valor ou valores das incógnitas que satisfazem às condições do enunciado.

Primeiramente, consideremos os problemas que apresentam uma incógnita e cujas relações entre os dados e a incógnita conduzem a equações do 1.º grau.

71. **Fases da resolução de um problema.** — Na resolução de um problema, distinguem-se as fases seguintes:

a) *estabelecimento da equação;*

b) *resolução da equação;*

c) *discussão do problema.*

A primeira fase consiste em exprimir, por meio de equação, as relações que ligam os dados à incógnita.

Para isso, imagina-se o problema resolvido, representando-se a incógnita pela letra x, e indicam-se com os dados e a incógnita as operações que se deveriam efetuar, no sentido de se verificar se é exato o resultado.

Depois de estabelecida a equação, passa-se a resolvê-la com auxílio da regra conhecida.

Finalmente, a terceira fase visa a interpretação da solução encontrada, a apreciação das condições de possibilidade e determinação do problema e a pesquisa dos valores particulares dos dados que conduzem a valores notáveis da incógnita.

72. **Problemas particulares e gerais.** — Quando os dados de um problema são numéricos, a solução obtida é *particular*, interessando apenas ao problema que se considera;

quando os dados são literais, a solução é *geral*, expressa por uma fórmula, a qual pode ser aplicada na resolução de todos os problemas que se apresentarem em condições análogas.

Iniciaremos o nosso estudo, resolvendo alguns problemas particulares.

73. Resolução de problemas particulares. — 1.º *Determinar o número que, somado à sua metade e à sua têrça parte, produz o total 22.*

Representemos, respectivamente, por

x ...... o número procurado

$\frac{x}{2}$ ...... a sua metade

$\frac{x}{3}$ ...... a sua têrça parte.

Devendo a soma dêsses números ser 22, temos

$$x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 22,$$

que é a equação do problema.

Resolvendo-a, encontramos

$$6x + 3x + 2x = 132$$

$$11x = 132$$

$$x = \frac{132}{11}$$

$$x = 12.$$

Verificação:

$$12 + \frac{12}{2} + \frac{12}{3} = 12 + 6 + 4 = 22.$$

2.º *Procurar um número, sabendo-se que a diferença entre os seus* $\frac{3}{4}$ *e os seus* $\frac{2}{5}$ *é de 7 unidades.*

Representemos, respectivamente, por

x ...... o número procurado

$\frac{3x}{4}$ ...... os seus $\frac{3}{4}$

$\frac{2x}{5}$ ...... os seus $\frac{2}{5}$.

Devendo ser 7 a diferença entre as partes consideradas do número procurado, segue-se que

$$\frac{3x}{4} - \frac{2x}{5} = 7.$$

Resolvendo a equação supra, encontramos

$$15x - 8x = 140$$

$$7x = 140$$

$$x = \frac{140}{7}$$

$$x = 20.$$

Verificação:

$$\frac{3}{4} \times 20 - \frac{2}{5} \times 20 = 15 - 8 = 7.$$

3.º *Qual é o número que se deve somar aos têrmos da fração $\frac{5}{8}$ para se obter outra igual a $\frac{3}{4}$?*

Representando por x o número procurado, a fração pedida será

$$\frac{5+x}{8+x}.$$

E, como esta deve ser igual a

$$\frac{3}{4},$$

segue-se que

$$\frac{5+x}{8+x} = \frac{3}{4}.$$

Resolvendo a equação supra, encontramos

$$4(5+x)=3(8+x)$$
$$20+4x=24+3x$$
$$4x-3x=24-20$$
$$x=4.$$

Verificação:

$$\frac{5+4}{8+4}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}.$$

4.º *Certo trabalho pode ser feito em 6 dias por um homem e em 9 dias por uma mulher. Trabalhando juntos, em que tempo poderão terminá-lo?*

Sejam, respectivamente,

x ...... o número de dias em que juntos executam o trabalho

$\frac{1}{x}$ ..... a parte que fazem em um dia

$\frac{1}{6}$ ...... a parte que o homem faz em um dia

$\frac{1}{9}$ ...... a parte que a mulher faz em um dia.

Fazendo ambos $\frac{1}{x}$ do trabalho em um dia, vem

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{9}=\frac{1}{x}.$$

Resolvendo a equação supra, encontramos

$$3x+2x=18$$
$$5x=18$$
$$x=\frac{18}{5}$$
$$x=3\frac{3}{5}d.$$

Verificação:

$$\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{9}\right)\times 3\,\frac{3}{5}=1.$$

5.º *Determinar um número formado de dois algarismos cuja soma é 8, sabendo-se que a diferença entre êsse número e o que se obtém pela inversão da ordem dos mesmos algarismos é 18.*

Representando por

x.......... as dezenas

$8-x$...... as unidades,

o número procurado pode ser expresso da maneira seguinte:

$$10x+8-x.$$

Por outro lado, invertendo a ordem dos algarismos, teremos o novo número

$$10\,(8-x)+x.$$

Como a diferença entre êsses números é 18, vem

$$10x+8-x-[10\,(8-x)+x]=18.$$

Resolvendo a equação supra, encontramos

$$10x+8-x-(80-10x+x)=18$$
$$10x+8-x-80+10x-x=18$$
$$10x-x+10x-x=18-8+80$$
$$18x=90$$
$$x=5.$$

E, como a soma dos valores absolutos dos algarismos é 8, o número procurado será

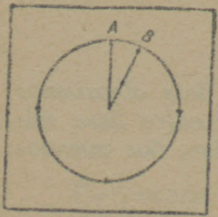
$$53.$$

Verificação:

$$53-35=18.$$

6.º *Determinar a hora em que os ponteiros de um relógio coincidem, pela primeira vez, depois das doze.*

Sejam, respectivamente,



A, o ponto correspondente às 12 horas,

B, o ponto em que se dará o encontro,

x, o número de divisões horárias compreendidas entre A e B.

Até o momento do encontro, o ponteiro das horas percorrerá x divisões, enquanto o dos minutos descreverá tôda a circunferência mais o arco AB, isto é,

$$12 + x.$$

Por outro lado, como a velocidade do primeiro é de 1 divisão por hora e a do segundo de 12 divisões, cada um demorará no percurso o tempo seguinte:

$$\text{o ponteiro das horas} \; \ldots . \; \frac{x}{1} = x$$

$$\text{o ponteiro dos minutos} \; .. \; \frac{12 + x}{12}.$$

Mas, por serem iguais os intervalos de tempo acima, vem

$$x = \frac{12 + x}{12}.$$

Resolvendo a equação estabelecida, encontramos

$$12x = 12 + x$$

$$12x - x = 12$$

$$11x = 12$$

$$x = \frac{12}{11}$$

$$x = 1\,\text{h}\,5\,\text{m}\,27\,\text{s}\,\frac{3}{11}.$$

7.º *Determinar a hora em que o ponteiro dos segundos de um relógio é bissetriz do ângulo formado pelo dos minutos e das horas, pela primeira vez, depois das doze.*

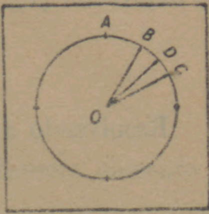
Sejam, respectivamente,

A, o ponto correspondente às doze horas,

OB, a posição do ponteiro das horas no instante procurado,

OD, a posição do ponteiro dos segundos,

OC, a posição do ponteiro dos minutos.



Nestas condições, marcando o ponto D a metade do arco BC, temos

$$\overset{\frown}{BD} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}.$$

Somando AB a ambos os membros da igualdade acima, vem

$$\overset{\frown}{BD} + \overset{\frown}{AB} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} + \overset{\frown}{AB},$$

ou

$$\overset{\frown}{AD} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} + \overset{\frown}{AB},$$

ou, ainda,

$$\overset{\frown}{AD} = \frac{\overset{\frown}{BC} + 2\overset{\frown}{AB}}{2} = \frac{\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AB}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{AB}}{2}.$$

Designando por x, o número de divisões percorridas pelo ponteiro das horas, o ponteiro dos minutos, cuja velocidade é 12 vêzes maior, terá percorrido $12x$.

Isto pôsto, vem

$$\overset{\frown}{AD} = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AC}}{2} = \frac{x + 12x}{2} = \frac{13x}{2}. \qquad (1)$$

Nesse tempo, o ponteiro dos segundos terá descrito a circunferência tôda mais o arco AD, isto é,

$$60 + \overset{\frown}{AD}.$$

Por outro lado, notando que a velocidade dêsse ponteiro é 60 vêzes maior que a dos minutos, isto é, $720x$, temos

$$60 + \overset{\frown}{AD} = 720x.$$

Substituindo, na igualdade acima, AD pelo valor obtido na expressão (1), vem

$$60+\frac{13x}{2}=720x.$$

Resolvendo a equação acima, encontramos

$$120+13x=1\,440x$$

$$13x-1\,440x=-120$$

$$-1\,427x=-120$$

$$1\,427x=120$$

$$x=\frac{120}{1\,427},$$

que é o arco descrito pelo ponteiro das horas. O ponteiro dos minutos terá percorrido, nesse tempo, um espaço 12 vêzes maior, isto é,

$$12\times\frac{120}{1\,427}=\frac{1\,440}{1\,427}.$$

E, como êsse número representa divisões de 1 minuto, vem

$$\frac{1\,440}{1\,427}\,m=1m\,\frac{780}{1\,427}\,s.$$

74. **Generalização.** — Consideremos o problema seguinte:

Certo operário constrói 12 caixas de madeira por dia, e outro 8; tendo o segundo um adiantamento de 20 caixas sôbre o primeiro, no fim de quantos dias de trabalho terão êles feito o mesmo número de caixas?

Representemos, respectivamente, por

x ...... o número de dias procurado
$12x$ .... o número de caixas feitas pelo 1.º
$8x$ ..... o número de caixas feitas pelo 2.º.

Como o adiantamento do segundo sôbre o primeiro era de 20 caixas, segue-se que

$$12x=8x+20.$$

Resolvendo a equação supra, encontramos

$$12x - 8x = 20$$

$$4x = 20$$

$$x = 5.$$

Obtivemos assim a solução 5, que interessa sòmente o problema que vimos de resolver.

Substituamos, agora, por letras os dados que figuram no problema e enunciêmo-lo do modo seguinte:

Certo operário constrói a *caixas de madeira por dia, e outro* b; *tendo o segundo um adiantamento de* m *caixas sôbre o primeiro, no fim de quantos dias de trabalho terão êles feito o mesmo número de caixas?*

Dizemos, então, que o problema acima foi generalizado.

Passemos a resolvê-lo.

Representemos, respectivamente, por

x ...... o número de dias procurado

ax ..... o número de caixas feitas pelo 1.º

bx ..... o número de caixas feitas pelo 2.º.

Como o adiantamento do segundo sôbre o primeiro era de m caixas, segue-se que

$$ax = bx + m.$$

Resolvendo a equação supra, encontramos

$$ax - bx = m$$

$$x(a - b) = m$$

$$x = \frac{m}{a - b}.$$

Ao contrário da solução numérica encontrada há pouco (5), a solução generalizada

$$x = \frac{m}{a - b} \qquad (1)$$

é aplicável a todos os problemas que se apresentarem em condições análogas.

Com efeito, consideremos o problema seguinte:

Certo indivíduo planta 9 pinheiros por hora, e outro 6; tendo o segundo um adiantamento de 18 sôbre o primeiro, no fim de quantas horas de trabalho terão êles plantado o mesmo número de pinheiros?

Notando que

$$a=9$$

$$b=6$$

$$m=18,$$

encontramos imediatamente, aplicando a fórmula (1),

$$x=\frac{m}{a-b}$$

$$x=\frac{18}{9-6}$$

$$x=6.$$

75. **Discussão.** — Ao enunciar as fases da resolução de um problema, mencionamos também a discussão (n. 71).

Em se tratando de problemas particulares, deve-se interpretar a solução obtida em face da natureza concreta do problema, uma vez que, nem sempre, a raiz da equação com ela se harmoniza.

Por outro lado, na discussão de problemas gerais procuram-se estabelecer as condições de possibilidade e determinação do problema, como também examinar os valores particulares dos dados que originam valores notáveis para a incógnita.

A seguir, interpretaremos algumas soluções de problemas particulares, para depois fazermos a discussão completa de vários problemas gerais.

76. **Interpretação de algumas soluções.** — Consideremos os exemplos seguintes:

1.º *Em uma reunião de 17 pessoas fez-se uma coleta que produziu 870 cruzeiros; tendo cada senhora contribuído com 40 cruzeiros e cada homem com 60, pergunta-se quantas eram as senhoras.*

Sejam, respectivamente,

x .... o número de senhoras
$17 - x$ .. o número de homens.

Como cada senhora contribuiu com Cr$ 40,00 e cada homem com Cr$ 60,00, segue-se que

$40x$ .... foi a contribuição das senhoras
$60(17 - x)$. foi a contribuição dos homens.

Por outro lado, tendo a importância colhida atingido a Cr$ 870,00, vem

$$40x + 60(17 - x) = 870,$$

que é a equação do problema.

Resolvendo-a, encontramos

$$40x + 1020 - 60x = 870$$

$$-20x = -150$$

$$x = \frac{150}{20}$$

$$x = 7{,}5.$$

A solução obtida satisfaz a equação, mas não pode ser aceita por estar em desacôrdo com a natureza do problema, de vez que o número de senhoras não pode ser fracionário.

Concluímos, pois, que o problema é *impossível*.

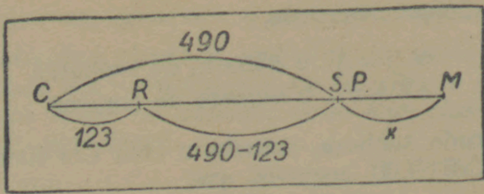
Interpretemos, agora, algumas soluções negativas.

2.º *Um automóvel, animado da velocidade média de 90 km por hora, parte de Curitiba, no mesmo instante em que outro, fazendo 60 km por hora, parte de Ribeira, ambos em direção a São Paulo, cuja distância de Curitiba é de 490 km; sabendo-se que a distância de Curitiba a Ribeira é de 123 km, pergunta-se a que distância de São Paulo se encontrarão.*

Imaginemos que o encontro se dará no ponto M e representemos a distância pedida por x.

Conforme a figura adiante, os percursos dos automóveis serão os seguintes:

1.º .... $490 + x$
2.º ... $490 - 123 + x$ ou $367 + x$.



Ora, se o primeiro, para percorrer 90 km demora 1 hora, para percorrer $490+x$ levará t horas.

Da proporcionalidade existente entre essas duas quantidades, resulta

$$\frac{90}{490+x}=\frac{1}{t}.$$

Aplicando a propriedade fundamental das proporções, tiramos

$$t=\frac{490+x}{90}. \qquad (1)$$

Pelo mesmo motivo, em relação ao segundo, temos

$$t=\frac{367+x}{60}. \qquad (2)$$

O intervalo de tempo obtido pelas proporções acima (t) é o mesmo, uma vez que os dois automóveis, tendo partido à mesma hora, chegam ao ponto de encontro no mesmo instante. — Em conseqüência,

$$\frac{490+x}{90}=\frac{367+x}{60}.$$

Resolvendo a equação supra, encontramos

$$2(490+x)=3(367+x)$$
$$980+2x=1101+3x$$
$$2x-3x=1101-980$$
$$-x=121$$
$$x=-121.$$

Significa, neste caso, a solução negativa obtida (-121) que o encontro dos automóveis se dará a 121 km *antes* de São Paulo, e não *depois*, como havíamos suposto.

1.º No primeiro caso, em que o denominador da expressão (2) é nulo por ser $m=1$, podemos ter

$$a \neq b$$
$$a = b.$$

Se $a \neq b$, o numerador é diferente de zero, resultando, para a raiz, valor infinito, isto é,

$$x = \frac{a-b}{0} = \infty.$$

Êsse resultado, que deve ser interpretado como impossível em face da natureza da questão, era bem previsto, porque, em tempo algum, as idades de duas pessoas que hoje são diferentes poderão tornar-se iguais.

Considerando-se, agora, $a=b$, teremos

$$x = \frac{0}{0}.$$

O valor obtido para x indica a solução indeterminada do problema, sendo, como a anterior, muito razoável; efetivamente, as idades que atualmente são iguais conservar-se-ão, em qualquer tempo, na mesma relação.

2.º Sendo $m > 1$, o denominador da fórmula (2) será positivo, enquanto o numerador poderá ser positivo, negativo ou nulo, conforme se tenha

$$a > mb$$
$$a < mb$$
$$a = mb.$$

Sob a suposição de $a > mb$, o valor de x, que é dado por $\frac{a-mb}{m-1}$, será positivo, por isso que os têrmos daquela expressão são do mesmo sinal.

A solução encontrada satisfaz plenamente ao problema, indicando uma época futura para aquêle acontecimento.

Realmente, por ser $a > mb$, teremos

$$\frac{a}{b} > m.$$

$$(1)\qquad \begin{aligned} a_1 &= a + x \\ b_1 &= b + x. \end{aligned}$$

Como, nessa época, a idade de A deve ser igual a m vêzes a idade de B, conforme a condição do problema, teremos a equação

$$m(b+x) = a + x,$$

ou, efetuando a operação indicada no primeiro membro,

$$mb + mx = a + x.$$

Isolando no segundo membro os têrmos independentes, resulta

$$mx - x = a - mb.$$

Colocando a incógnita em evidência, vem

$$x(m-1) = a - mb.$$

Dividindo ambos os membros pelo coeficiente da incógnita, teremos finalmente

$$(2)\qquad x = \frac{a - mb}{m - 1}.$$

Estabelecida a expressão de x em função dos dados, obteremos, pela sua substituição em (1), para as novas idades a_1 e b_2, os valores seguintes:

$$(3)\qquad \left| \begin{aligned} a_1 &= a + \frac{a - mb}{m-1} = \frac{am - mb}{m-1} = m\frac{a-b}{m-1}. \\ b_1 &= b + \frac{a - mb}{m-1} = \frac{a-b}{m-1}. \end{aligned} \right.$$

Discussão: Examinemos as modificações sofridas pela incógnita, resultantes da consideração de diversos valores importantes atribuídos aos dados m, a e b, dos quais ela depende.

Em relação a m, nos interessam as hipóteses

$$m = 1$$

$$m > 1$$

$$m < 1.$$

1.º No primeiro caso, em que o denominador da expressão (2) é nulo por ser $m=1$, podemos ter

$$a \neq b$$

$$a = b.$$

Se $a \neq b$, o numerador é diferente de zero, resultando, para a raiz, valor infinito, isto é,

$$x = \frac{a-b}{0} = \infty.$$

Êsse resultado, que deve ser interpretado como impossível em face da natureza da questão, era bem previsto, porque, em tempo algum, as idades de duas pessoas que hoje são diferentes poderão tornar-se iguais.

Considerando-se, agora, $a=b$, teremos

$$x = \frac{0}{0}.$$

O valor obtido para x indica a solução indeterminada do problema, sendo, como a anterior, muito razoável; efetivamente, as idades que atualmente são iguais conservar-se-ão, em qualquer tempo, na mesma relação.

2.º Sendo $m > 1$, o denominador da fórmula (2) será positivo, enquanto o numerador poderá ser positivo, negativo ou nulo, conforme se tenha

$$a > mb$$

$$a < mb$$

$$a = mb.$$

Sob a suposição de $a > mb$, o valor de x, que é dado por $\frac{a-mb}{m-1}$, será positivo, por isso que os têrmos daquela expressão são do mesmo sinal.

A solução encontrada satisfaz plenamente ao problema, indicando uma época futura para aquêle acontecimento.

Realmente, por ser $a > mb$, teremos

$$\frac{a}{b} > m.$$

Em cada ano que passa os têrmos da fração serão aumentados de uma unidade, enquanto o seu valor decrescente, por ser ela imprópria, se aproxima de m, que será alcançado no fim de x anos, ocasião essa em que $a = mb$, isto é, a idade do primeiro é m vêzes a do segundo.

Se tivermos, agora, $a < mb$, o numerador da fração será negativo e como o denominador é positivo resultará para x um valor negativo.

Essa solução, indicando encontrar-se no passado a época em que as idades guardavam a relação expressa no enunciado, está de acôrdo com a natureza concreta do problema, uma vez que os intervalos de tempo são suscetíveis da interpretação naquele sentido.

Da desigualdade $a < mb$ tiramos ainda

$$\frac{a}{b} < m.$$

Essa fração, segundo a condição essencial de ser $a > b$, implìcitamente compreendida no enunciado, é ainda imprópria e, como tal, o seu valor só crescerá pela adição de quantidades iguais aos seus têrmos, sendo essas negativas. Em vista da presente circunstância, poderemos concluir que o seu valor só atingirá a m quando a ambos os têrmos somarmos $-x$.

Para $a = mb$, teremos

$$x = \frac{0}{m-1} = 0.$$

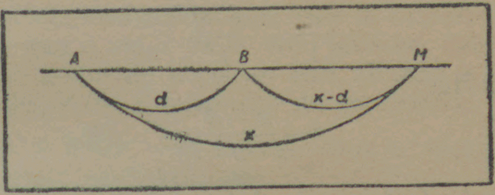
A solução nula encontrada indica que a condição do problema é satisfeita na época atual.

3.º Empregando idêntico raciocínio, poderíamos discutir todos os casos originados da hipótese $m < 1$. Êsse trabalho, entretanto, poderá ser dispensado, pois que, mediante o emprêgo de um artifício, o caso presente recairá no já examinado de $m > 1$.

Consiste o artifício em substituir no enunciado m por $\frac{1}{m}$ e inverter os nomes dos indivíduos.

2.º *Determinar a hora e o ponto de encontro de dois móveis que partem no mesmo instante dos pontos A e B, separados da distância* d, *dirigidos para o mesmo sentido e* *animados de movimento uniforme respectivamente com as velocidades* v *e* v'. (Problema dos correios).

O clássico problema dos correios é sempre citado como exemplo pela maioria dos autores, pela ampla discussão que comporta.



Figurando em seu enunciado duas incógnitas, parece, à primeira vista, que deva ser resolvido por um sistema de duas equações. Entretanto, estando essas incógnitas ligadas por uma relação muito simples, o problema pode ser perfeitamente resolvido, como veremos, com auxílio de uma equação única.

Para resolvê-lo de maneira geral, representemos os seus elementos pelos símbolos seguintes:

d, a distância das duas origens

v, a velocidade do primeiro móvel

v', a velocidade do segundo móvel

x, a distância da primeira estação ao ponto de encontro

$x-d$, a distância da segunda estação ao ponto de encontro.

Convencionemos, preliminarmente, serem positivas as distâncias percorridas à direita de A e os intervalos de tempo contados depois da partida dos móveis.

Um móvel dotado de movimento uniforme, segundo a definição da Mecânica, percorre espaços iguais em tempos iguais, denominando-se, nesse movimento, velocidade o espaço percorrido na unidade de tempo.

Se o primeiro móvel, para percorrer v metros, demora 1 segundo, para percorrer x metros levará t segundos.

Da proporcionalidade existente entre essas quantidades, resulta

$$\frac{v}{1}=\frac{x}{t}.$$

De acôrdo com as propriedades das proporções, tiramos

$$t = \frac{x}{v}. \qquad (1)$$

Em relação ao segundo móvel, pelo mesmo motivo, temos

$$\frac{v'}{1} = \frac{x-d}{t},$$

de onde se deduz

$$t = \frac{x-d}{v'}. \qquad (2)$$

O intervalo de tempo t, obtido pelas duas proporções, é o mesmo para os dois móveis, uma vez que, saindo ambos à mesma hora, chegam ao ponto de encontro no mesmo instante.

Igualando as expressões (1) e (2), teremos estabelecido a equação do problema

$$\frac{x}{v} = \frac{x-d}{v'}.$$

Resolvendo-a, encontramos sucessivamente

$$v'x = vx - vd,$$

ou

$$vx - v'x = vd,$$

ou, ainda,

$$(v - v')\,x = vd,$$

ou, finalmente,

$$x = \frac{vd}{v - v'},$$

fórmula que nos dá a distância. Determinando x, o tempo será dado pela expressão (1).

Discussão: Podemos atribuir à distância d, existente entre as duas origens, valor nulo ou não, isto é, podemos supor

$$d \neq 0$$
$$d = 0.$$

Em relação às velocidades v e v', temos a considerar os casos seguintes:

$$v > v'$$
$$v = v'$$

$$v < v'$$
$$v' = 0$$
$$v = 0$$
$$v = v' = 0.$$

I. $d \neq 0$ e $v > v'$. O denominador da fórmula será positivo, pela segunda desigualdade, e como o numerador também o é, segue-se que o valor de x será positivo, indicando essa solução que o ponto de encontro está situado à direita das estações, respondendo diretamente ao enunciado.

II. $d \neq 0$ e $v = v'$. Supondo-se nulo o denominador, a fórmula nos dará imediatamente

$$x = \frac{dv}{0} = \infty.$$

A solução infinita encontrada indica a impossibilidade do problema, isto é, que os móveis não se encontrarão. Evidentemente, se êles avançam com igual velocidade e a lei do movimento é a mesma para ambos, o encontro não se poderá dar, uma vez que a partida seja efetuada no mesmo instante de pontos diferentes.

III. $d \neq 0$ e $v < v'$. O denominador sendo negativo, a solução encontrada também o será.

Com efeito, fazendo $v - v' = -m$, teremos

$$x = \frac{vd}{-m} = -\frac{vd}{m}.$$

O valor negativo de x determina a posição do ponto de encontro à esquerda de A, indicando a impossibilidade do problema no sentido do enunciado, satisfazendo-o, entretanto, uma vez que seja invertido o sentido do movimento.

Com efeito, o móvel B saindo adiante de A, com maior velocidade, o afastamento entre ambos crescerá gradativamente, sendo evidente a impossibilidade da existência de um ponto de encontro à direita de A. Se os considerarmos, entretanto, em percurso inverso, o móvel dotado de maior velocidade, saindo atrás do menos veloz, deverá alcançá-lo em um ponto situado à esquerda da primeira origem.

Supondo-os, porém, em movimento desde época remota na primeira direção, a solução perde o seu caráter de impossibilidade, uma vez que se abandone a restrição, que aliás não figura na equação, de serem A e B as origens do movimento, para considerá-los, apenas, como pontos de passagem simultânea dos dois móveis.

Depois da ampliação do seu enunciado o problema comporta solução negativa, indicando o ponto fixado pela equação que o encontro já houve, o que é bem razoável, pois que o móvel mais veloz já deve ter estado atrás e passado o móvel de menor velocidade.

IV. $d \neq 0$ e $v' = 0$. Para essa hipótese a fórmula dará

$$x = \frac{vd}{v} = d.$$

A solução obtida indica que o ponto de encontro coincide com a estação B, satisfazendo a equação e o problema.

V. $d \neq 0$ e $v = 0$. No presente caso a fórmula transforma-se em

$$x = \frac{vd}{v - v'} = \frac{0}{-v'} = 0.$$

O encontro dos móveis deve efetuar-se na origem A, em vista do valor nulo de x.

Essa solução, que identifica a equação, está de acôrdo com as condições do problema, considerado com a ampliação citada no 3.º caso.

VI. $d \neq 0$ e $v = v' = 0$. Introduzindo essa hipótese diretamente na fórmula, vem

$$x = \frac{vd}{v - v'} = \frac{0}{0}.$$

Entretanto, a indeterminação encontrada é apenas aparente.

Para eliminá-la, substituamos, na fórmula, v por v' e eliminemos o fator comum v.

Teremos, pois,

$$x = \frac{vd}{v - v'} = \frac{vd}{v - v} = \frac{vd}{v(1-1)} = \frac{d}{1-1} = \frac{d}{0} = \infty.$$

A solução infinita obtida indica que os móveis não se encontrarão, o que forçosamente se dará para o problema proposto, sob a hipótese atual, uma vez que, estando os móveis parados, há afastamento entre êles.

VII. $d=0$ e $v>v'$. Em virtude da presente hipótese, a fórmula ficará reduzida a

$$x=\frac{vd}{v-v'}=\frac{0}{v-v'}=0.$$

Devendo o valor de x exprimir a distância da origem A ao ponto de encontro, indicará, por ser nulo, que aquêle acontecimento se dará no próprio ponto A.

Efetivamente, sendo diferentes as velocidades e a origem do movimento a mesma para ambos, os móveis só estarão juntos na ocasião da partida.

VIII. $d=0$ e $v=v'$. Introduzindo na fórmula êstes valores, teremos

$$x=\frac{0}{0}.$$

A solução indeterminada obtida significa que o problema é satisfeito para qualquer valor de x.

Tendo os móveis igual velocidade e sendo comuns o instante e o ponto de partida, estarão sempre juntos, uma vez que o movimento seja de mesmo sentido para ambos.

IX. $d=0$ e $v<v'$. Para êstes valores atribuídos aos dados, a fórmula tomará o aspecto seguinte, fazendo $v-v'=$ $=-m$,

$$x=\frac{0}{-m}=0.$$

A solução nula indica, como no 7.º caso, que o ponto de encontro coincide com a origem A.

X. $d=0$ e $v'=0$. Neste caso, temos

$$x=\frac{0}{v}=0.$$

A presente solução, como a anterior, indica que o encontro se efetua no ponto A.

XI. $d=0$ e $v=0$. Para êsses valores atribuídos aos dados d e v, a solução será, ainda, nula.

Efetivamente, teremos

$$x = \frac{0}{-v'} = 0.$$

XII. $d = 0$ e $v = v' = 0$. Neste caso, o encontro se dá no ponto em que A e B coincidem:

$$x = 0.$$

78. **EXERCÍCIOS.**

1. Dividindo certo número por 6 e somando 2 ao quociente, obtém-se 5. Qual é êsse número? R. 18.

2. Qual é o número que, somado à sua nona parte e à sua têrça parte, produz 52? R. 36.

3. Repartir 27 moedas entre duas pessoas de modo que a parte da segunda seja os $\frac{4}{5}$ da parte da primeira. R. 15 e 12.

4. Repartir 60 em duas partes tais, que seja 10 a soma dos quocientes obtidos pela divisão da primeira por 5 e da segunda por 7. R. 25 e 35.

5. Repartir 96 em duas partes tais, que a diferença entre o quociente da primeira por 6 e da segunda por 12 seja 7. R. 60 e 36.

6. Procurar um número tal, que os seus $\frac{2}{3}$ aumentados de 4 unidades produzam os $\frac{3}{4}$ dêsse número. R. 48.

7. Procurar um número tal, que os seus $\frac{5}{6}$ diminuídos de 3 unidades produzam os $\frac{4}{5}$ dêsse número. R. 90.

8. A soma de dois números é 19, e 43 é a soma dos produtos do primeiro por 2 e do segundo por 3. Quais são êsses números? R. 14 e 5.

9. Qual é o número que se deve somar ao numerador da fração $\frac{5}{12}$ para obter outra igual a $\frac{2}{3}$? R. 3.

10. Qual é o número que se deve subtrair do numerador da fração $\frac{11}{6}$ para se obter outra igual a $\frac{5}{3}$? R. 1.

11. Qual é o número que se deve somar aos têrmos da fração $\frac{3}{8}$ para se obter outra igual a $\frac{2}{3}$? R. 7.

12. Qual é o número que se deve subtrair dos têrmos da fração $\frac{7}{8}$ para se obter outra igual a $\frac{1}{2}$? R. 6.

13. Procurar uma fração igual a $\frac{3}{4}$ e que a soma dos têrmos seja 56. R. $\frac{24}{32}$.

14. A soma dos têrmos de certa fração é 13. Somando a ambos 7 unidades, obteremos outra igual a $\frac{4}{5}$. Qual é essa fração? R. $\frac{5}{8}$.

15. Que número se deve somar a 12 e a 7 para que os números resultantes estejam na razão de $\frac{3}{2}$? R. 3.

16. Que número se deve somar a 11 e subtrair de 19 para que os números resultantes estejam na razão de $\frac{2}{3}$? R. 1.

17. Certo negociante comprou uma peça de fazenda pelo preço de Cr$ 180,00 os 12 metros. Vendendo-a, depois, à razão de Cr$ 375,00 os 15 metros, obteve Cr$ 270,00 de lucro. Qual era o comprimento da peça? R. 27 m.

18. Um pai tem 3 vêzes a idade de seu filho; sendo 48 a soma de ambas, determinar a idade de cada um. R. 36 e 12.

19. Procurar três múltiplos consecutivos de 5, cuja soma seja 120. R. 35, 40 e 45.

20. Quais os dois números consecutivos, cuja metade do menor excede de 7 unidades a têrça parte do maior? R. 44 e 45.

21. A soma de dois números consecutivos é igual aos $\frac{13}{9}$ do primeiro mais os $\frac{4}{7}$ do segundo. Quais são êsses números? R. 27 e 28.

22. Dois operários recebem a mesma importância, um por 25 dias de trabalho e outro por 20. Calcular o salário diário de cada um, tendo em conta que o segundo ganha por dia 4 cruzeiros mais que o primeiro. R. Cr$ 16,00 e Cr$ 20,00.

23. Em uma fábrica trabalham entre homens e mulheres, 15 pessoas, recebendo o total de Cr$ 222,00 diários; os primeiros ganham por dia Cr$ 16,00 e as últimas Cr$ 14,00. Achar o número de homens e o de mulheres. R. 6 e 9.

24. A c h a r o número formado de dois algarismos, em que 5 é a soma dêstes e 9 a diferença entre êsse número e o que se obtém invertendo-lhe a ordem dos algarismos. R. 32.

25. Somando 18 unidades a certo número de dois algarismos, obtém-se outro formado pelos mesmos algarismos, porém dispostos em ordem inversa. A c h a r êsse número, sabendo-se que a soma dos seus algarismos é 12. R. 57.

26. 7 é a soma dos dois algarismos componentes de um número. Subtraindo dêsse número 27 unidades, obtém-se o número formado pelos mesmos algarismos dispostos em ordem inversa. Qual é êsse número? R. 52.

27. Dois trens partem ao mesmo tempo, um do Rio e outro de Cruzeiro, em direção a São Paulo; a velocidade média do primeiro é de 66 km/h e a do segundo 32. Estando Cruzeiro a 253 km do Rio, a que distância do Rio se cruzarão os trens? R. 491,117 km.

28. Vindo um ao encontro do outro, dois indivíduos partem, ao mesmo tempo, das cidades M e N, distantes entre si de 22 km. Caminhando o primeiro 6 km/h e o segundo 4, a que distância de M se encontrarão? R. 13,200 km.

29. Quantos minutos deverão transcorrer depois das 4 horas para que se superponham, pela primeira vez, os ponteiros de um relógio?

R. $21\text{ m}\,\frac{9}{11}$.

30. Um trem faz o percurso entre as estações A e B, distantes de 240 km, em 4 horas. A que horas deverá partir de A outro trem, cuja velocidade excede a do anterior de $\frac{1}{4}$, para que cheguem juntos à estação B, tendo em vista que o primeiro partiu às 9 horas? R. 9 h 48 m.

31. Despendeu-se certa importância na compra de 30 metros de tecido. Se, porém, cada metro tivesse custado 2 cruzeiros menos, com o mesmo gasto teríamos adquirido 6 metros mais. Calcular a quantia empregada na compra. R. Cr$ 360,00.

32. Um tanque é alimentado por duas fontes; a primeira pode enchê-lo em 6 horas e a segunda em 8; funcionando ambas simultâneamente, em que tempo ficará cheio o tanque? R. $3\text{ h}\,\frac{3}{7}$.

33. Uma torneira enche um reservatório em 6 horas e outra o esvazia em 10; funcionando ambas simultâneamente, em que tempo ficará cheio o reservatório? R. 15 h.

34. Multiplicando certo número por a e dividindo o produto por b obtém-se m. Qual é êsse número? R. $x = \frac{bm}{a}$.

35. Qual é o número que se deve somar aos têrmos da fração $\frac{a}{b}$ para se obter outra igual a $\frac{m}{n}$? R. $x = \frac{bm - an}{n - m}$.

36. Um tanque é alimentado por três torneiras; a primeira pode enchê-lo no tempo t, a segunda em t' e a terceira em t''. Funcionando as três simultâneamente, em que tempo ficará cheio o tanque?

R. $x = \frac{tt't''}{t't'' + tt'' + tt'}$.

79. Problemas com duas incógnitas. — Resolvamos, agora, alguns problemas nos quais a tradução algébrica das condições estabelecidas no enunciado originam sistemas de equações do 1.º grau com duas incógnitas.

1.º *Quais os números cuja semi-soma é 22 e cuja semi-diferença é 3?*

Designando por x e y os números procurados, vem

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{x+y}{2}=22 \\[2ex] \dfrac{x-y}{2}=3, \end{array}\right.$$

sistema que resolve o problema proposto.

Eliminando os denominadores, temos

$$\left|\begin{array}{ll} x+y=44 & \quad (1) \\ x-y=6. & \quad (2) \end{array}\right.$$

Somando ordenadamente essas equações, obtemos

$$2x=50$$
$$x=25.$$

Substituindo x por 25 na equação (1), encontramos

$$25+y=44$$
$$y=19.$$

Os números procurados são, pois,

25 e 19.

2.º *Somando a unidade ao numerador de certa fração, obtém-se outra cujo valor é* $\frac{1}{3}$; *subtraindo a unidade do seu denominador, a fração resultante é igual a* $\frac{1}{4}$. *Qual é a fração?*

Representando a fração procurada por

$$\frac{x}{y},$$

resulta imediatamente

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{y} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{x}{y-1} = \dfrac{1}{4}, \end{cases}$$

sistema que resolve o problema proposto.

Eliminando os denominadores, vem

$$\begin{cases} 3x+3=y \\ 4x=y-1. \end{cases}$$

Transpondo os têrmos, resulta

$$\begin{cases} 3x-y=-3 & (1) \\ 4x-y=-1. & (2) \end{cases}$$

Multiplicando ambos os membros da primeira equação por -1, temos

$$\begin{cases} -3x+y=3 \\ 4x-y=-1. \end{cases}$$

Somando ordenadamente, encontramos

$$x=2.$$

Substituindo x por seu valor na equação (2), encontramos

$$8-y=-1$$
$$y=9.$$

A fração procurada é, pois

$$\frac{2}{9}.$$

3.º *Um número composto de dois algarismos excede de 27 unidades ao número que se obtém com os mesmos algarismos colocados em ordem inversa. Determinar êsse número, sabendo-se que o seu quociente por 26 é igual ao algarismo das unidades.*

Representando por x o algarismo das dezenas e por y o das unidades, o número procurado será expresso por

$$10x+y,$$

e o número formado pelos mesmos algarismos em ordem inversa por

$$10y + x.$$

De acôrdo com o enunciado do problema, temos, portanto

$$\begin{cases} 10x + y = 10y + x + 27 \\ \dfrac{10x + y}{26} = y. \end{cases}$$

Preparando as equações, vem

$$\begin{cases} 9x - 9y = 27 \\ 10x = 25y, \end{cases}$$

ou, simplificando,

$$\begin{cases} x - y = 3 & (1) \\ 2x = 5y. & (2) \end{cases}$$

Da primeira equação, tiramos

$$x = y + 3.$$

Substituindo êsse valor na segunda, obtemos

$$2(y + 3) = 5y,$$
$$2y + 6 = 5y$$
$$3y = 6$$
$$y = 2.$$

Substituindo y por 2 na segunda equação, vem

$$2x = 10$$
$$x = 5.$$

Obtém-se, dêsse modo, o número procurado:

52.

80. **EXERCÍCIOS.**

1. Determinar dois números cuja soma seja 55 e cuja diferença seja 7. R. 31 e 24.

2. Quais os números cuja semi-soma é 17 e cuja semidiferença é 2? R. 19 e 15.

3. Determinar dois números tais cuja soma dos produtos do primeiro por 5 e do segundo por 2 seja 40, e cuja diferença entre os produtos do primeiro por 4 e do segundo por 3 seja 9. R. 6 e 5.

4. Procurar dois números, sabendo que a soma dos quocientes do primeiro por 5 e do segundo por 6 é 7, e que a soma dos produtos do primeiro por 3 e do segundo por 4 é 132. R. 20 e 18.

5. Dividir o número 50 em duas partes tais que a soma dos quocientes da primeira por 7 e da segunda por 11 seja 6. R. 28 e 22.

6. Repartir 76 em duas partes, de maneira que a diferença entre os quocientes da primeira por 8 e da segunda por 7 seja 2. R. 48 e 28.

7. Procurar dois números cuja soma é 93, sabendo-se que o quociente do maior pelo menor é 9 e que o resto dessa divisão é 3. R. 84 e 9.

8. Pede-se o preço de uma galinha e de um peru, sabendo-se que 5 galinhas e 3 perus custam Cr$ 330,00 e que 8 galinhas e 7 perus custam Cr$ 726,00. R. Cr$ 12,00 e Cr$ 90,00.

9. Uma pessoa tem notas de dois valores diferentes; 10 notas da primeira espécie e 5 da segunda perfazem Cr$ 45,00, e 15 notas da primeira e 8 da segunda perfazem Cr$ 70,00. De que valores são as notas? R. Cr$ 2,00 e Cr$ 5,00.

10. Duas pessoas comparam suas posses, dizendo a primeira: «se me deres 30 cruzeiros, ficaremos com quantias iguais, e se eu te der 20, ficarás com o triplo do que me restar». Quanto possui cada uma? R. Cr$ 70,00 e Cr$ 130,00.

11. Há 8 anos, a idade de um pai era o quádruplo da de seu filho, e daqui a 8 anos será o dôbro. Qual é a idade de cada um? R. 40 e 16.

12. Determinar a fração igual a $\frac{3}{4}$, cuja soma dos seus têrmos seja 21. R. $\frac{9}{12}$.

13. Somando 11 ao numerador de certa fração, o seu valor fica igual a 2, e subtraindo-lhe 3 do denominador, ela se torna igual a 1. Qual é a fração? R. $\frac{5}{8}$.

14. Procurar uma fração tal que, quando se soma a unidade ao numerador, o seu valor passa a ser $\frac{4}{5}$, e que, quando se soma a unidade ao denominador, ela se torna igual a $\frac{3}{4}$. R. $\frac{27}{35}$.

15. Somando 3 ao numerador de certa fração, obtém-se outra igual $\frac{1}{2}$, e subtraindo 5 do seu denominador, obtém-se outra igual a $\frac{1}{3}$. Qual é a fração? R. $\frac{1}{8}$.

16. Determinar uma fração, sabendo-se que, quando se soma 3 aos seus têrmos, obtém-se outra igual a $\frac{3}{5}$, e que, quando se subtrai 2 dos seus têrmos, o seu valor passa a ser $\frac{1}{5}$. R. $\frac{3}{7}$.

17. Subtraindo 3 dos têrmos de uma fração, obtém-se outra igual a $\frac{4}{7}$, e somando 5 nos seus têrmos, o seu valor passa a ser $\frac{4}{5}$. Qual é a fração? R. $\frac{7}{10}$.

18. A soma dos dois algarismos de um número é 9, e o quociente dêsse número pela soma dos seus algarismos é 7. Qual é o número? R. 63.

19. Dividindo certo número pela soma dos seus dois algarismos, obtém-se o quociente 6 e o resto 7; invertendo a ordem dos algarismos e dividindo o número resultante pela sua soma, obtém-se o quociente 4 e o resto 6. Qual é o número? R. 85.

20. Eu tenho o dôbro da idade que tu tinhas quando eu tinha a idade que tu tens; e, quando tiveres a idade que eu tenho, a soma das nossas idades será 45 anos. Quais são as idades? R. 20 e 15.

CAPÍTULO V

NÚMEROS IRRACIONAIS — RADICAIS FRAÇÕES IRRACIONAIS

81. **Grandezas incomensuráveis.** — Ampliando noções já ventiladas nas séries anteriores dêste curso, acentuemos que, na comparação de duas grandezas da mesma espécie, três casos se podem apresentar.

I. Dadas duas grandezas A e B, a primeira contém exatamente n vêzes a segunda, isto é, a grandeza A pode ser decomposta em n partes iguais a B.

Neste caso, a razão de A para B é um *número natural:*

$$\frac{A}{B} = n.$$

II. A grandeza B não está contida um número exato de vêzes em A, mas A contém m vêzes cada uma das n partes em que se pode subdividir B.

A razão de A para B, neste caso, é um *número fracionário:*

$$\frac{A}{B} = \frac{m}{n}.$$

Nos dois casos considerados, as grandezas A e B admitem medida comum: são *comensuráveis.*

A razão de duas grandezas comensuráveis é *número racional* (inteiro ou fracionário).

III. Dadas duas grandezas A e B, pode suceder, ainda, que uma delas não contenha um número exato de vêzes a outra, nem as partes em que esta se divida, por pequenas que sejam.

Neste caso, as grandezas consideradas não admitem medida comum: são *incomensuráveis.*

Mencionemos um exemplo: *a diagonal e o lado de um quadrado são grandezas incomensuráveis.*

Com efeito, demonstra-se que êsses segmentos não admitem medida comum.

A razão de duas grandezas incomensuráveis não determina número inteiro ou fracionário.

Assim, para representar aritmèticamente as grandezas incomensuráveis com a unidade, introduziram-se novos entes abstratos: os *números irracionais.*

82. **Noção de número irracional.** — Ao estudar o processo de extração da raiz quadrada dos números naturais, vimos que só se podem obter *valores aproximados* para as raízes daqueles que não são quadrados.

Extraindo, por exemplo a raiz quadrada de 2 e considerando os valores aproximados por falta, obtemos, sucessivamente,

1 1,4 1,41 1,414 1,4142 1,41421...

Êsses números crescem indefinidamente, mas os seus quadrados são todos *menores* que 2.

Por outro lado, se considerarmos as raízes aproximadas por excesso, obteremos números que decrescem indefinidamente, mas os seus quadrados são todos *maiores* que 2.

O valor exato de

$$\sqrt{2}$$

está, então, compreendido entre o conjunto dos números cujos quadrados são menores do que 2 e o dos números cujos quadrados são maiores do que 2.

A raiz quadrada de 2,

$$1{,}4142136...$$

é um número decimal, não periódico, cujos algarismos se sucedem indefinidamente. Os números assim formados dizem-se *irracionais*.

83. **Operações.** — Na prática, podemos operar com os números irracionais, substituindo-os por valores aproximados expressos sob forma decimal.

Naturalmente, operando dêsse modo, cometeremos sempre erros, mas êstes podem ser reduzidos, desde que se considere um número suficiente de algarismos decimais.

84. **Raiz m—ésima de um número.** — Dá-se a denominação de raiz m—ésima de um número a outro número que, elevado à potência m, reproduz o primeiro.

A raiz m—ésima do número A representa-se pelo símbolo

$$\sqrt[m]{A}.$$

Lê-se: raiz m de A ou raiz m—ésima de A.

O número m é o *índice* ou grau da raiz, $\sqrt{\ }$ é o sinal de *radical* e A é o *radicando* (1).

De acôrdo com a definição, temos

$$\sqrt[3]{8}=2 \qquad \text{porque} \qquad 2^3=8$$

$$\sqrt[4]{81}=3 \qquad \text{porque} \qquad 3^4=81.$$

De modo geral, podemos escrever

$$\left(\sqrt[m]{A}\right)^m = A.$$

85. **Valores e sinais das raízes.** — De acôrdo com a definição de raiz e tendo em vista a regra dos sinais, sabemos que

(1) Vide *Curso de Matemática, 2.ª Série*, cap. IV.

$$\sqrt{+9} = +3 \qquad \text{porque} \qquad (+3)^2 = +9$$

$$\sqrt{+9} = -3 \qquad \text{porque} \qquad (-3)^2 = +9.$$

Anàlogamente, temos

$$\sqrt[4]{+16} = +2 \qquad \text{porque} \qquad (+2)^4 = +16$$

$$\sqrt[4]{+16} = -2 \qquad \text{porque} \qquad (-2)^4 = +16.$$

As raízes de índice par dos números positivos têm, pois, dois valores simétricos, os quais são indicados do modo seguinte:

$$\sqrt{+9} = \pm 3$$

$$\sqrt[4]{+16} = \pm 2.$$

Considerando as raízes de índice ímpar, temos

$$\sqrt[3]{+27} = +3 \qquad \text{porque} \qquad (+3)^3 = +27$$

$$\sqrt[3]{-27} = -3 \qquad \text{porque} \qquad (-3)^3 = -27.$$

Por outro lado, as raízes de índice par dos números negativos, como, por exemplo,

$$\sqrt{-4}, \quad \sqrt[4]{-32}, \quad \sqrt[6]{-a},$$

são numèricamente impossíveis, por isso que tôda potência de grau par de qualquer número positivo ou negativo é sempre número positivo.

Resumindo as observações feitas, podemos estabelecer a regra seguinte:

1.º) *tôda raiz de índice par de um número positivo tem dois valores simétricos;*

2.º) *tôda raiz de índice ímpar de um número qualquer tem um único valor, do mesmo sinal que êsse número;*

3.º) *tôda raiz de índice par de um número negativo não tem solução.*

86. **Radicais.** — Dá-se a denominação de *radical* a qualquer raiz indicada de um número ou expressão algébrica. — Exemplos:

$$\sqrt{5},\quad \sqrt[3]{ab},\quad 3\sqrt{c}.$$

Dois radicais dizem-se *semelhantes* quando têm o mesmo índice e o mesmo radicando. — Exemplo:

$$\sqrt{ab} \quad \text{e} \quad 5\sqrt{ab}.$$

87. **Valor aritmético de um radical.** — No cálculo aritmético dos radicais consideram-se apenas as raízes positivas dos números positivos, isto é, as raízes aritméticas dêsses números.

Assim, damos a denominação de *valor aritmético* de um radical cujo radicando é positivo ao valor positivo do radical.

Exemplo: o valor aritmético de

$$\sqrt{9}$$

é 3, embora êsse radical tenha outro valor, — 3.

88. **Cálculo aritmético dos radicais.** — As transformações que podem ser efetuadas com os radicais, compreendidas no cálculo aritmético dos radicais, fundam-se nos princípios que estabeleceremos nos parágrafos seguintes.

Devemos acentuar que êsses princípios só se aplicam aos valores aritméticos dos radicais cujos radicandos são positivos.

89. **Teoremas.** — I. *A raiz* m *de um produto é igual ao produto das raízes* m *dos fatôres.*

Com efeito, dado o radical

$$\sqrt[m]{a \times b \times c},$$

temos, conforme a definição,

$$\left(\sqrt[m]{a \times b \times c}\right)^m = a \times b \times c.$$

Por outro lado, sabemos que

$$\left(\sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{b} \times \sqrt[m]{c}\right)^m = \left(\sqrt[m]{a}\right)^m \times \left(\sqrt[m]{b}\right)^m \times \left(\sqrt[m]{c}\right)^m =$$
$$= a \times b \times c.$$

Comparando essas igualdades, podemos escrever

$$\left(\sqrt[m]{a \times b \times c}\right)^m = \left(\sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{b} \times \sqrt[m]{c}\right)^m,$$

de onde se deduz

$$\sqrt[m]{a \times b \times c} = \sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{b} \times \sqrt[m]{c}.$$

II. *O valor aritmético de um radical não se altera quando se multiplicam ou dividem o índice e o expoente do radicando pelo mesmo número.*

Seja o radical

$$\sqrt[m]{a}.$$

Façamos

$$\sqrt[m]{a} = b. \qquad (1)$$

Elevando o radical à potência m, vem

$$a = b^m.$$

Elevando ambos os membros dessa igualdade a uma nova potência n, obtemos

$$a^n = b^{mn}.$$

Mas, conforme a definição de raiz, temos

$$\sqrt[mn]{a^n} = b. \qquad (2)$$

Comparando as igualdades (1) e (2), podemos escrever

$$\sqrt[m]{a} = \sqrt[mn]{a^n},$$

ou

$$\sqrt[mn]{a^n} = \sqrt[m]{a}.$$

90. **Redução de radicais ao mesmo índice.** — Aplicando o segundo princípio do parágrafo precedente, podemos reduzir dois ou mais radicais ao mesmo índice.

Sejam os radicais

$$\sqrt[m]{a} \quad \text{e} \quad \sqrt[n]{b}.$$

Multiplicando o índice e o expoente do primeiro por n e o índice e o expoente do segundo por m, vem

$$\sqrt[m]{a} = \sqrt[mn]{a^n}$$

$$\sqrt[n]{b} = \sqrt[mn]{b^m}.$$

O índice comum dos radicais reduzidos é múltiplo comum de todos os índices. Assim, para maior facilidade do cálculo, toma-se para índice comum o mínimo múltiplo comum dos índices dados.

91. **Regra.** — *Para reduzir radicais ao mesmo índice, determina-se o m. m. c. dos índices e multiplicam-se o índice e o expoente de cada radical pelo quociente que se obtém na divisão dêsse m. m. c. pelo índice correspondente.* — Exemplos:

1.º Reduzir ao mesmo índice os radicais seguintes:

$$\sqrt[6]{5} \quad \text{e} \quad \sqrt[9]{2}.$$

Notando que

$$\text{m. m. c.} \, (6 \text{ e } 9) = 18,$$

obtemos, conforme a regra,

$$\sqrt[6]{5} = \sqrt[18]{5^3}$$

$$\sqrt[9]{2} = \sqrt[18]{2^2}.$$

2.º Reduzir ao mesmo índice os radicais seguintes:

$$\sqrt[3]{2^2}, \quad \sqrt[4]{7^3} \quad \text{e} \quad \sqrt[6]{5}.$$

Temos

$$\text{m. m. c.} \, (3, 4 \text{ e } 6) = 12.$$

Aplicando, pois, a regra, vem

$$\sqrt[3]{2^2} = \sqrt[12]{2^8}$$

$$\sqrt[4]{7^3} = \sqrt[12]{7^9}$$

$$\sqrt[6]{5} = \sqrt[12]{5^2}.$$

3.º Reduzir ao mesmo índice os radicais seguintes:

$$\sqrt[8]{a^3}, \quad \sqrt[3]{a^2} \quad \text{e} \quad \sqrt[6]{a}.$$

Sendo

$$\text{m. m. c. } (8,\ 3 \text{ e } 6) = 24,$$

temos, de acôrdo com a regra,

$$\sqrt[8]{a^3} = \sqrt[24]{a^9}$$

$$\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[24]{a^{16}}$$

$$\sqrt[6]{a} = \sqrt[24]{a^4}.$$

92. EXERCÍCIOS.

Reduzir ao mesmo índice os radicais seguintes:

1. $\sqrt[3]{4},\ \sqrt{7},\ \sqrt[6]{10}.$ R. $\sqrt[6]{16},\ \sqrt[6]{343},\ \sqrt[6]{10}.$

2. $\sqrt{2},\ \sqrt[3]{3},\ \sqrt[4]{4}.$ R. $\sqrt[12]{64},\ \sqrt[12]{81},\ \sqrt[12]{64}.$

3. $\sqrt{3},\ \sqrt[3]{5},\ \sqrt[4]{6}.$ R. $\sqrt[12]{729},\ \sqrt[12]{625},\ \sqrt[12]{216}.$

4. $\sqrt{3},\ \sqrt[5]{9},\ \sqrt[10]{7}.$ R. $\sqrt[10]{243},\ \sqrt[10]{81},\ \sqrt[10]{7}.$

5. $\sqrt[10]{3},\ \sqrt[5]{6},\ \sqrt[4]{2}.$ R. $\sqrt[20]{9},\ \sqrt[20]{1296},\ \sqrt[20]{32}.$

6. $\sqrt[5]{a^2},\ \sqrt[6]{a^5},\ \sqrt[15]{a}.$ R. $\sqrt[30]{a^{12}},\ \sqrt[30]{a^{25}},\ \sqrt[30]{a^2}.$

7. $\sqrt[3]{4a^2},\ \sqrt[4]{3a^3},\ \sqrt[6]{5a^5}.$ R. $\sqrt[12]{256a^8},\ \sqrt[12]{27a^9},\ \sqrt[12]{25a^{10}}.$

8. $\sqrt{3a},\ \sqrt[3]{2ab},\ \sqrt[4]{4a^2b}.$ R. $\sqrt[12]{729a^6},\ \sqrt[12]{16a^4b^4},\ \sqrt[12]{64a^6b^3}.$

93. **Simplificação de radicais.** — Há radicais que podem ser transformados em outros do mesmo valor, nos quais o índice e o radicando são números menores.

Essa transformação, denominada *simplificação de radicais*, funda-se na propriedade fundamental.

Consideremos os três casos em que um radical pode ser simplificado.

94. **1.º caso.** — Seja o radical

$$\sqrt[12]{a^6 b^9},$$

no qual o índice e os expoentes do radicando têm um divisor comum.

Aplicando a propriedade fundamental dos radicais, dividamos êsses números por 3, que é o m. d. c. de 12, 6 e 9:

$$\sqrt[12]{a^6b^9} = \sqrt[4]{a^2b^3}.$$

95. **Regra.** — *Para simplificar um radical, dividem-se o índice e os expoentes do radicando pelo seu máximo divisor comum.* Exemplos:

1.º Simplificar o radical

$$\sqrt[6]{81}.$$

Decompondo 81 em fatôres primos, vem

$$\sqrt[6]{81} = \sqrt[6]{3^4}.$$

Dividindo o índice e o expoente pelo seu m. d. c., que é 2, obtemos

$$\sqrt[6]{81} = \sqrt[6]{3^4} = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9}.$$

2.º Simplificar o radical

$$\sqrt[12]{64}.$$

Decompondo em 64 fatôres primos, temos

$$\sqrt[12]{64} = \sqrt[12]{2^6}$$

Dividindo o índice e o expoente pelo seu m. d. c., que é 6, encontramos

$$\sqrt[12]{64} = \sqrt[12]{2^6} = \sqrt{2}.$$

3.º Simplificar o radical

$$\sqrt[15]{1728a^6b^9}.$$

Decompondo o radicando em fatôres, vem

$$\sqrt[15]{1728a^6b^9} = \sqrt[15]{2^6 \times 3^3 \times a^6 \times b^9}.$$

Dividindo o índice e os expoentes pelo seu m. d. c., que é 3, obtemos

$$\sqrt[15]{1728a^6b^9} = \sqrt[15]{2^6 \times 3^3 \times a^6 \times b^9} = \sqrt[5]{2^2 \times 3 \times a^2 \times b^3} = \sqrt[5]{12a^2b^3}.$$

96. **2.º caso.** — Consideremos o radical

$$\sqrt{3a^2b^4},$$

no qual os expoentes de dois fatôres do radicando são divisíveis pelo índice.

De acôrdo com as propriedades dos radicais (n. 89), sabemos que a raiz de um produto é igual ao produto das raízes dos fatôres.

Temos, assim,

$$\sqrt{3a^2b^4} = \sqrt{3} \times \sqrt{a^2} \times \sqrt{b^4},$$

ou, efetuando,

$$\sqrt{3} \times \sqrt{a^2} \times \sqrt{b^4} = ab^2\sqrt{3}.$$

Portanto:

$$\sqrt{3a^2b^4} = ab^2\sqrt{3}.$$

97. **Regra.** — *Para escrever fora do radical um fator cujo expoente é divisível pelo índice, basta tomá-lo com um expoente igual ao quociente da divisão do seu primitivo expoente pelo índice.* — Exemplos:

1.º Simplificar o radical

$$\sqrt{180}.$$

Efetuando a decomposição, vem

$$\sqrt{180} = \sqrt{2^2 \times 3^2 \times 5}.$$

Tirando os fatôres 2^2 e 3^2 do radical, obtemos

$$\sqrt{180} = \sqrt{2^2 \times 3^2 \times 5} = 2 \times 3\sqrt{5} = 6\sqrt{5}.$$

Temos, assim,

$$\sqrt{180} = 6\sqrt{5}.$$

2.º Simplificar o radical

$$4\sqrt{300}.$$

Decompondo o radicando, temos

$$4\sqrt{300}=4\sqrt{2^2\times 3\times 5^2}.$$

Tirando os fatôres 2^2 e 5^2 do radical, encontramos

$$4\sqrt{300}=4\sqrt{2^2\times 3\times 5^2}=4\times 2\times 5\sqrt{3}=40\sqrt{3}.$$

Temos, assim,

$$4\sqrt{300}=40\sqrt{3}.$$

3.º Simplificar o radical

$$2a\sqrt[3]{192b^3c}.$$

Efetuando a decomposição, vem

$$2a\sqrt[3]{192b^3c}=2a\sqrt[3]{2^6\times 3\times b^3\times c}.$$

Tirando do radical os fatôres 2^6 e b^3, obtemos

$$2a\sqrt[3]{192b^3c}=2a\sqrt[3]{2^6\times 3\times b^3\times c}=2a\times 2^2\times b\sqrt[3]{3\times c}=$$
$$=8ab\sqrt[3]{3c}.$$

Temos, assim,

$$2a\sqrt[3]{192b^3c}=8ab\sqrt[3]{3c}.$$

98. **3.º caso.** — Consideremos o radical

$$\sqrt{a^5},$$

no qual o expoente do radicando é maior que o índice.

Neste caso, o radicando pode ser decomposto em fatôres, de modo que um dêles tenha o expoente divisível pelo índice:

$$\sqrt{a^5}=\sqrt{a^4\times a}.$$

Como no caso anterior, temos

$$\sqrt{a^5}=\sqrt{a^4\times a}=a^2\sqrt{a}.$$

99. **Regra.** — *Quando os expoentes do radicando são maiores do que o índice, mas não são por êle exatamente divisíveis, para simplificar o radical decompõe-se o radicando em fatôres tais que alguns dêles tenham expoentes múltiplos do índice, procedendo-se, em relação a êstes, como no caso anterior.*

Consideremos alguns exemplos.

1.º $\sqrt{125}=\sqrt{5^3}=\sqrt{5^2\times 5}=5\sqrt{5}.$

2.º $3\sqrt{216}=3\sqrt{2^3\times 3^3}=3\sqrt{2^2\times 2\times 3^2\times 3}=$

$$=3\times 2\times 3\sqrt{2\times 3}=18\sqrt{6}.$$

3.º $\sqrt[3]{1296}=\sqrt[3]{2^4\times 3^4}=\sqrt[3]{2^3\times 2\times 3^3\times 3}=2\times 3\sqrt[3]{2\times 3}=6\sqrt[3]{6}$

4.º $\sqrt[4]{243a^5b^6c^4}=\sqrt[4]{3^5\times a^5\times b^6\times c^4}=$

$$=\sqrt[4]{3^4\times 3\times a^4\times a\times b^4\times b^2\times c^4}=3\times a\times b\times c\sqrt[4]{3\times a\times b^2}=$$

$$=3abc\sqrt[4]{3ab^2}.$$

100. **Introdução de fatôres em radical.** — Tendo em vista a igualdade

$$\sqrt[n]{a^n}=a,$$

segue-se que, para introduzir no radical

$$c\sqrt[n]{b}$$

o fator c, basta elevá-lo à potência n.

Temos, assim,

$$c\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{bc^n}.$$

101. **Regra.** — *Para introduzir um fator em radical, basta elevá-lo à potência igual ao índice.*

Exemplos:

1.º $2\sqrt{3} = \sqrt{2^2 \times 3}$

2.º $3^2\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{3^6 \times 4}$

3.º $2a^2b\sqrt[4]{c} = \sqrt[4]{2^4 \times a^8 \times b^4c}.$

102. EXERCÍCIOS.

Simplificar as expressões seguintes:

1. $\sqrt[4]{25}.$	R. $\sqrt{5}.$	2. $\sqrt[4]{36}.$	R. $\sqrt{6}.$
3. $\sqrt[4]{100}.$	R. $\sqrt{10}.$	4. $\sqrt[4]{484}.$	R. $\sqrt{22}.$
5. $\sqrt[4]{9a^2b^2}.$	R. $\sqrt{3ab}.$	6. $\sqrt[4]{25x^2y^2}.$	R. $\sqrt{5xy}.$
7. $\sqrt[6]{216}.$	R. $\sqrt{6}.$	8. $\sqrt[6]{625}.$	R. $\sqrt[3]{25}.$
9. $\sqrt[6]{125}.$	R. $\sqrt{5}.$	10. $\sqrt[6]{343}.$	R. $\sqrt{7}.$
11. $\sqrt[6]{4a^2b^2}.$	R. $\sqrt[3]{2ab}.$	12. $\sqrt[6]{125a^3x^3}.$	R. $\sqrt{5ax}.$
13. $\sqrt[8]{81}.$	R. $\sqrt{3}.$	14. $\sqrt[8]{64}.$	R. $\sqrt[4]{8}.$
15. $\sqrt[8]{81a^4b^4}.$	R. $\sqrt{3ab}.$	16. $\sqrt[8]{625x^4y^4}.$	R. $\sqrt{5xy}.$
17. $\sqrt{50}.$	R. $5\sqrt{2}.$	18. $\sqrt{147}.$	R. $7\sqrt{3}.$
19. $\sqrt{243}.$	R. $9\sqrt{3}.$	20. $\sqrt{605}.$	R. $11\sqrt{5}.$
21. $3\sqrt{180}.$	R. $18\sqrt{5}.$	22. $2\sqrt{726}.$	R. $22\sqrt{6}.$
23. $3\sqrt{343}.$	R. $21\sqrt{7}.$	24. $6\sqrt{1331}.$	R. $66\sqrt{11}.$
25. $5\sqrt{245}.$	R. $35\sqrt{5}.$	26. $2\sqrt{720}.$	R. $24\sqrt{5}.$
27. $5\sqrt{468}.$	R. $30\sqrt{13}.$	28. $7\sqrt{1500}.$	R. $70\sqrt{15}.$
29. $3\sqrt{a^2b}.$	R. $3a\sqrt{b}.$	30. $6\sqrt{108a^2m^3}.$	R. $36am\sqrt{3m}.$
31. $\sqrt[3]{40}.$	R. $2\sqrt[3]{5}.$	32. $\sqrt[3]{256}.$	R. $4\sqrt[3]{4}.$
33. $3\sqrt[3]{375}.$	R. $15\sqrt[3]{3}.$	34. $5\sqrt[3]{297}.$	R. $15\sqrt[3]{11}.$
35. $4\sqrt[3]{1080}.$	R. $24\sqrt[3]{5}.$	36. $2\sqrt[3]{432}.$	R. $12\sqrt[3]{2}.$

103. **Adição e subtração de radicais.** — A adição e subtração de radicais efetuam-se segundo as regras relativas a essas operações sôbre as expressões algébricas.

Temos, assim,

$$\sqrt{a}+\sqrt{a}+\sqrt{b}=2\sqrt{a}+\sqrt{b}.$$

$$\sqrt{a}-\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=\sqrt{a}-\sqrt{a}-\sqrt{b}=-\sqrt{b}.$$

104. **Regras.** — *Para somar radicais, escrevem-se uns em seguida dos outros, com os respectivos sinais, reduzindo-se os que forem semelhantes.*

Para subtrair radicais, escrevem-se uns em seguida dos outros, trocando-se os sinais dos subtraendos e reduzindo-se os que forem semelhantes.

Exemplos:

1.º $$\left(2\sqrt{a}+4\sqrt{b}\right)+\left(5\sqrt{a}-3\sqrt{b}\right)=2\sqrt{a}+4\sqrt{b}+$$
$$+5\sqrt{a}-3\sqrt{b}=7\sqrt{a}+\sqrt{b}.$$

2.º $$\left(5\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{b}-4\sqrt{2}+3\sqrt{a}\right)=$$
$$=5\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{2}-\sqrt{b}+4\sqrt{2}-3\sqrt{a}=2\sqrt{a}+$$
$$+3\sqrt{2}.$$

3.º $$\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}\right)-\left(\sqrt{a}+\sqrt{a+b}\right)=\sqrt{a+b}+$$
$$+\sqrt{a-b}-\sqrt{a}-\sqrt{a+b}=\sqrt{a-b}-\sqrt{a}.$$

105. **Observação.** — Sempre que fôr possível, devem-se simplificar os radicais dados em uma soma ou subtração, por isso que, algumas vêzes, depois dessa transformação, podem resultar semelhantes radicais que antes não o eram.

Consideremos alguns exemplos.

1.º $$3\sqrt{75}+2\sqrt{12}+\sqrt{27}=3\sqrt{5^2\times 3}+2\sqrt{2^2\times 3}+$$
$$+\sqrt{3^2\times 3}=3\times 5\sqrt{3}+2\times 2\sqrt{3}+3\sqrt{3}=15\sqrt{3}+$$
$$+4\sqrt{3}+3\sqrt{3}=22\sqrt{3}.$$

2.º
$$10\sqrt{180}+5\sqrt{720}-6\sqrt{1620}+8\sqrt{500}=$$
$$=10\sqrt{2^2\times3^2\times5}+5\sqrt{2^2\times2^2\times3^2\times5}-$$
$$-6\sqrt{2^2\times3^2\times3^2\times5}+8\sqrt{2^2\times5^2\times5}=$$
$$=10\times2\times3\sqrt{5}+5\times2\times2\times3\sqrt{5}-6\times2\times3\times$$
$$\times3\sqrt{5}+8\times2\times5\sqrt{5}=60\sqrt{5}+60\sqrt{5}-$$
$$-108\sqrt{5}+80\sqrt{5}=92\sqrt{5}.$$

3.º
$$\sqrt[3]{40}+\sqrt[3]{135}+\sqrt[3]{625}=\sqrt[3]{2^3\times5}+\sqrt[3]{3^3\times5}+$$
$$+\sqrt[3]{5^3\times5}=2\sqrt[3]{5}+3\sqrt[3]{5}+5\sqrt[3]{5}=10\sqrt[3]{5}.$$

106. **Multiplicação e divisão de radicais.** — Sendo a raiz de um produto igual ao produto das raízes do mesmo grau dos fatôres, temos

$$\sqrt{a}\times\sqrt{b}\times\sqrt{c}=\sqrt{abc}.$$

Assim, para multiplicar radicais que têm o mesmo índice, basta multiplicar os radicandos e afetar êsse produto do índice comum.

Por outro lado, na divisão de radicais, consideramos a relação conhecida:

$$\sqrt{a}:\sqrt{b}=\sqrt{a:b}.$$

Assim, para dividir radicais que têm o mesmo índice, dividem-se os radicandos, afetando-se êsse produto do índice comum.

Se os radicais dados não tiverem o mesmo índice, antes de efetuar a operação deve-se proceder à redução.

107. **Regras.** — *Para multiplicar radicais, multiplicam-se os coeficientes, reduzem-se todos ao mesmo índice e multiplicam-se os novos radicandos obtidos, afetando-se êste produto do índice comum.*

Para dividir radicais, dividem-se os coeficientes, reduzem-se todos ao mesmo índice e dividem-se os novos radicandos obtidos, afetando-se êste produto do índice comum.

Exemplos:

1.º $\sqrt[3]{2} \times \sqrt{3} = \sqrt[6]{2^2} \times \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{2^2 \times 3^3} = \sqrt[6]{4 \times 27} = \sqrt[6]{108}.$

2.º $\sqrt{3} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{3^6} \times \sqrt[12]{3^4} \times \sqrt[12]{3^3} = \sqrt[12]{3^6 \times 3^4 \times 3^3} =$

$= \sqrt[12]{3^{13}} = \sqrt[12]{3^{12} \times 3} = 3\sqrt[12]{3}.$

3.º $4\sqrt[3]{2} : 2\sqrt[3]{4} = \dfrac{4\sqrt[3]{2}}{2\sqrt[3]{4}} = 2\sqrt[3]{\dfrac{2}{4}} = 2\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}.$

108. EXERCÍCIOS.

Efetuar as operações seguintes:

1. $2\sqrt{180} + 2\sqrt{245} - 6\sqrt{125} + \sqrt{605}$. R. $7\sqrt{5}$.
2. $5\sqrt{8} + 2\sqrt{50} - 6\sqrt{98} + 3\sqrt{32}$. R. $-10\sqrt{2}$.
3. $2\sqrt{726} - \sqrt{486} + \sqrt{216} - 2\sqrt{294}$. R. $5\sqrt{6}$.
4. $5\sqrt{112} + 4\sqrt{252} - 10\sqrt{175} + 2\sqrt{343}$. R. $8\sqrt{7}$.
5. $\sqrt{3675} + 5\sqrt{243} - 2\sqrt{1875} - \sqrt{1452}$. R. $8\sqrt{3}$.
6. $\frac{1}{2}\sqrt{72} + \frac{1}{4}\sqrt{128} - \frac{1}{3}\sqrt{162} - \frac{1}{7}\sqrt{98}$. R. $\sqrt{2}$.
7. $\frac{1}{2}\sqrt{112} - \frac{1}{3}\sqrt{252} + \frac{1}{4}\sqrt{448} + \frac{1}{5}\sqrt{700}$. R. $4\sqrt{7}$.
8. $3\sqrt[3]{1029} + 2\sqrt[3]{192} - \sqrt[3]{3000} + \sqrt[3]{81}$. R. $22\sqrt[3]{3}$.
9. $\sqrt[3]{686} + \sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{250}$. R. $\sqrt[3]{2}$.
10. $2\sqrt[3]{56} + 3\sqrt[3]{189} - \sqrt[3]{875}$. R. $8\sqrt[3]{7}$.
11. $2\sqrt[3]{54} - 5\sqrt[3]{250} + 3\sqrt[3]{1024}$. R. $5\sqrt[3]{2}$.
12. $2\sqrt[4]{80} + \sqrt[4]{405} - 3\sqrt[4]{3125} + 4\sqrt[4]{5}$. R. $-4\sqrt[4]{5}$.
13. $\sqrt{9a^3} - \sqrt{4a^3} + \sqrt{25a^3}$. R. $6a\sqrt{a}$.
14. $4b\sqrt{72a^3} - 2a\sqrt{18ab^2} - 3\sqrt{50a^3b^2}$. R. $3ab\sqrt{2a}$.
15. $a\sqrt{4ab^3} + b\sqrt{9a^3b} - 4\sqrt{a^3b^3}$. R. $ab\sqrt{ab}$.

16. $\sqrt{a^2c + b^2c + 2abc} + 2\sqrt{a^2c} - \sqrt{4b^2c}$. R. $(3a - b)\sqrt{c}$.

17. $\sqrt{a^2b + 2ab + b} - \sqrt{a^2b - 4ab + 4b} + \sqrt{a^2b - 6ab + 9b}$.

R. $a\sqrt{b}$.

18. $3\sqrt{8} \times 5\sqrt{2}$. R. 60

19. $2\sqrt{27} \times 3\sqrt{3}$. R. 54.

20. $\sqrt{5} \times \sqrt[3]{2}$ R. $\sqrt[6]{500}$.

21. $2\sqrt[3]{2} \times 3\sqrt[4]{3}$. R. $6\sqrt[12]{432}$.

22. $\sqrt{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[4]{2}$ R. $2\sqrt[12]{2}$.

23. $\sqrt{5} \times \sqrt[3]{5} \times \sqrt[4]{5}$. R. $5\sqrt[12]{5}$.

24. $7\sqrt[6]{a} \times 3\sqrt[4]{b}$. R. $21\sqrt[12]{a^2b^3}$.

25. $3a\sqrt[3]{bc} \times 2b\sqrt[4]{a^2c^2}$. R. $6ab\sqrt[6]{a^3b^2c^5}$.

26. $\sqrt{3} : \sqrt[4]{3}$. R. $\sqrt[4]{3}$.

27. $\sqrt[3]{5} : \sqrt[6]{5}$. R. $\sqrt[6]{5}$.

28. $12\sqrt[6]{72} : 4\sqrt[3]{3}$. R. $3\sqrt{2}$.

29. $4\sqrt[3]{3} : 2\sqrt{2}$. R. $2\sqrt[6]{\dfrac{9}{8}}$.

30. $\sqrt[6]{2a^2b} : \sqrt[8]{2a^3b}$. R. $\sqrt[24]{\dfrac{2b}{a}}$.

31. $3\sqrt{6} \times \sqrt{8} \times 2\sqrt{3}$. R. 72.

32. $3\sqrt[5]{4} \times 2\sqrt[3]{3} \times 5\sqrt[15]{24}$. R. $30\sqrt[5]{72}$.

33. $\sqrt[3]{2} \times \sqrt{3} : \sqrt[6]{12}$. R. $\sqrt[3]{3}$.

34. $\sqrt[4]{15} \times \sqrt[3]{10} \times \sqrt[6]{3} : \sqrt{30}$. R. $\sqrt[12]{\dfrac{5}{12}}$.

35. $(\sqrt{128} + \sqrt{8} + \sqrt{72}) : \sqrt{8}$. R. 8.

36. $(\sqrt{75} + \sqrt{48} + \sqrt{27}) : 6\sqrt{3}$. R. 2.

109. **Potências e raízes de radicais.** — De acôrdo com a definição de potência sabe-se que

$$(1) \qquad \left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{a} \times \ldots, \qquad (n \text{ vêzes})$$

ou, por ser a raiz de um produto indicado igual ao produto das raízes de mesmo grau dos respectivos fatôres,

$$(2) \qquad \sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{a} \times \ldots = \sqrt[m]{a \times a \times a \times \ldots} = \sqrt[m]{a^n}.$$

As igualdades (1) e (2) tendo um membro comum, podemos escrever

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a^n},$$

expressão que justifica a regra enunciada a seguir.

110. **Regra.** — *Para elevar um radical a uma potência qualquer, eleva-se o radicando a essa potência.* — Exemplos:

1.º $\left(\sqrt[3]{5}\right)^4 = \sqrt[3]{5^4}.$

2.º $\left(\sqrt[3]{2}\right)^6 = \sqrt[3]{2^6} = 2^2 = 4.$

3.º $\left(\sqrt[4]{12}\right)^5 = \sqrt[4]{12^5} = \sqrt[4]{12^4 \times 12} = 12\sqrt[4]{12}.$

Passemos, agora, à radiciação dos radicais, considerando a expressão

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}.$$

Elevando-a à potência n, teremos, de acôrdo com a regra anterior,

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^n = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a^n}} = \sqrt[m]{a}. \qquad (1)$$

Por outro lado, sabemos que:

$$\left(\sqrt[mn]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a}. \qquad (2)$$

As igualdades (1) e (2) tendo um membro comum, concluímos que

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^n = \left(\sqrt[mn]{a}\right)^n,$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$$

111. Regra. — *Para extrair uma raiz de um radical, multiplicam-se, entre si, os índices.* — Exemplos:

1.º $\sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2}.$

2.º $\sqrt[3]{\sqrt[4]{64}} = \sqrt[12]{64} = \sqrt[12]{2^6} = \sqrt{2}.$

3.º $\sqrt[3]{\sqrt[3]{729}} = \sqrt[9]{729} = \sqrt[9]{3^6} = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9}.$

112. EXERCICIOS.

1. $(3\sqrt{2})^2.$ R. $18.$
2. $(5\sqrt[4]{3})^2.$ R. $25\sqrt{3}$
3. $(3\sqrt[3]{a^2})^4.$ R. $81a^2\sqrt[3]{a^2}.$
4. $\sqrt{4\sqrt{2}}.$ R. $2\sqrt[4]{2}.$
5. $\sqrt[3]{8\sqrt{5}}.$ R. $2\sqrt[6]{5}.$
6. $\sqrt[3]{a^2\sqrt{a^4}}.$ R. $a\sqrt[3]{a}.$
7. $\left(\sqrt{2\sqrt{3}}\right)^4$ R. $12.$
8. $2\sqrt{\sqrt{14}} + 3\sqrt{\sqrt{14}} - 6\sqrt{\sqrt{14}}.$ R. $-\sqrt[4]{14}$

9. $\sqrt[6]{\sqrt[3]{6}}-\sqrt{\sqrt{6}}+\sqrt[3]{\sqrt[6]{6}}.$ R $\sqrt[18]{6}.$

10. $2\sqrt[3]{\sqrt[4]{5}}+4\sqrt[4]{\sqrt[3]{5}}+5\sqrt[6]{\sqrt{5}}.$ R. $11\sqrt[12]{5}.$

113. **Frações irracionais.** — Uma fração diz-se *irracional* quando pelo menos um dos seus têrmos é irracional.

Exemplos:

$$\frac{\sqrt{2}}{3},\quad \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{e} \quad \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Quando uma fração tem o denominador irracional, para maior facilidade do cálculo numérico, procura-se torná-lo racional, sem alterar o valor da fração.

114. **Racionalização de denominadores.** — A operação que permite transformar uma fração com denominador irracional em outra do mesmo valor com denominador racional denomina-se *racionalização do denominador*.

A seguir, examinaremos alguns casos simples de racionalização de denominadores.

I. Seja uma fração do tipo

$$\frac{A}{\sqrt{B}},$$

em que A e B são expressões racionais, monômios ou polinômios.

Multiplicando ambos os têrmos da fração pela raiz de B, vem

$$\frac{A}{\sqrt{B}}=\frac{A\sqrt{B}}{\sqrt{B}\cdot\sqrt{B}}=\frac{A\sqrt{B}}{\sqrt{B^2}}=\frac{A\sqrt{B}}{B}.$$

Temos, portanto:

$$\frac{A}{\sqrt{B}}=\frac{A\sqrt{B}}{B}.$$

Consideremos alguns exemplos.

1.º
$$\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5^2}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

2.º
$$\frac{5}{2\sqrt{a}}=\frac{5\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\times\sqrt{a}}=\frac{5\sqrt{a}}{2\sqrt{a^2}}=\frac{5\sqrt{a}}{2a}.$$

3.º
$$\frac{7}{\sqrt{12}}=\frac{7}{\sqrt{2^2\times 3}}=\frac{7\sqrt{3}}{\sqrt{2^2\times 3}\times\sqrt{3}}=\frac{7\sqrt{3}}{\sqrt{2^2\times 3^2}}=$$
$$=\frac{7\sqrt{3}}{2\times 3}=\frac{7\sqrt{3}}{6}.$$

II. Seja, agora, uma fração do tipo

$$\frac{A}{\sqrt{B}+\sqrt{C}}$$

Multiplicando ambos os têrmos da fração por

$$\sqrt{B}-\sqrt{C},$$

expressão conjugada do denominador, vem

$$\frac{A}{\sqrt{B}+\sqrt{C}}=\frac{A\left(\sqrt{B}-\sqrt{C}\right)}{\left(\sqrt{B}+\sqrt{C}\right)\left(\sqrt{B}-\sqrt{C}\right)}.$$

Recordando que o produto da soma de dois têrmos pela sua diferença é igual ao quadrado do primeiro menos o quadrado do segundo, podemos escrever

$$\frac{A\left(\sqrt{B}-\sqrt{C}\right)}{\left(\sqrt{B}+\sqrt{C}\right)\left(\sqrt{B}-\sqrt{C}\right)}=\frac{A\left(\sqrt{B}-\sqrt{C}\right)}{B-C}.$$

Temos, portanto,

$$\frac{A}{\sqrt{B}+\sqrt{C}}=\frac{A\left(\sqrt{B}-\sqrt{C}\right)}{B-C},$$

e, anàlogamente,

$$\frac{A}{\sqrt{B}-\sqrt{C}}=\frac{A\left(\sqrt{B}+\sqrt{C}\right)}{B-C}.$$

Assim, quando o denominador da fração é um binômio com radicais do segundo grau, para racionalizá-lo basta multiplicar os têrmos da fração pela expressão conjugada do denominador.

Consideremos alguns exemplos.

1.º

$$\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\frac{3\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}=\frac{3\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{5-2}=$$

$$=\frac{3\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{3}=\sqrt{5}+\sqrt{2}.$$

2.º $$\frac{a}{3+\sqrt{2}}=\frac{a\left(3-\sqrt{2}\right)}{\left(3+\sqrt{2}\right)\left(3-\sqrt{2}\right)}=\frac{a\left(3-\sqrt{2}\right)}{9-2}=$$

$$=\frac{a\left(3-\sqrt{2}\right)}{7}.$$

3.º $$\frac{a\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}=\frac{a\sqrt{c}\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)}{\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)}=$$

$$=\frac{a\left(\sqrt{b}\times\sqrt{c}+\sqrt{c}\times\sqrt{c}\right)}{b-c}=\frac{a\left(\sqrt{bc}+c\right)}{b-c}.$$

Observação: quando o denominador da fração é polinômio contendo têrmos com radical do 2.º grau, a racionalização pode ser efetuada segundo a mesma regra, desde que se reunam, por meio de parênteses, dois ou mais têrmos.

115. **EXERCÍCIOS.**

Racionalizar o denominador das frações seguintes:

1. $\frac{3}{\sqrt{8}}$. R. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.
2. $\frac{5}{\sqrt{12}}$. R. $\frac{5\sqrt{3}}{6}$.
3. $\frac{7}{\sqrt{18}}$. R. $\frac{7\sqrt{2}}{6}$.
4. $\frac{5}{\sqrt{20}}$. R. $\frac{\sqrt{5}}{2}$.
5. $\frac{8}{\sqrt{24}}$. R. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.
6. $\frac{a}{\sqrt{b^3}}$. R. $\frac{a\sqrt{b}}{b^2}$.
7. $\sqrt{\frac{2}{3}}$. R. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.
8. $\sqrt{\frac{3}{8}}$. R. $\frac{\sqrt{6}}{4}$.
9. $\sqrt{\frac{7}{12}}$. R. $\frac{\sqrt{21}}{6}$.
10. $\sqrt{\frac{7}{18}}$. R. $\frac{\sqrt{14}}{6}$
11. $\frac{1}{3+\sqrt{2}}$. R. $\frac{3-\sqrt{2}}{7}$.
12. $\frac{1}{\sqrt{3}-1}$ R. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$.
13. $\frac{5}{\sqrt{8}-2}$. R. $\frac{5\sqrt{8}+10}{4}$.
14. $\frac{7}{3+\sqrt{5}}$ R. $\frac{21-7\sqrt{5}}{4}$.
15. $\frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$. R. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
16. $\frac{1+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$. R. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
17. $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$. R $2\sqrt{6}-5$.
18. $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$. R. $4+\sqrt{15}$.
19. $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$. R. $\frac{a+b+2\sqrt{ab}}{a-b}$.
20. $\frac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$. R. $\sqrt{ab}$.

Capítulo VI

EQUAÇÕES DO 2.º GRAU

116. **Definições.** — Uma equação é do segundo grau com uma incógnita quando, reduzida à forma inteira e racional, o primeiro membro, constituído pelo conjunto dos seus têrmos, é polinômio do segundo grau em relação àquele elemento.

A forma geral das equações do 2.º grau é a seguinte:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

em que o coeficiente a é sempre diferente de zero.

Pode suceder, entretanto, que sejam nulos, um ou outro, os coeficientes b e c, ou ambos ao mesmo tempo.

Resultam, nesse caso, equações dos tipos seguintes:

$$ax^2 + bx = 0,$$
$$ax^2 + c = 0,$$
$$ax^2 = 0$$

denominadas equações *incompletas* do segundo grau.

E' bem de ver que as equações *completas* da forma

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

contêm têrmos da segunda potência da incógnita, da primeira e independentes.

117. **Resolução das equações incompletas.** — 1.º Seja a equação

$$ax^2 + bx = 0.$$

Colocando em evidência a incógnita, vem

$$x(ax + b) = 0.$$

O primeiro membro, constituído pelo produto de dois fatôres, será nulo quando um dêles o fôr, condição essa que nos permite determinar as duas raízes da equação proposta.

Com efeito, uma das raízes será

$$x=0.$$

Para obter, a segunda raiz, façamos

$$ax+b=0.$$

Da equação acima fàcilmente se deduz

$$ax=-b$$

$$x=-\frac{b}{a}.$$

As raízes da equação considerada são, pois,

$$\begin{cases} x'=0 \\ x''=-\dfrac{b}{a}. \end{cases}$$

Consideremos um exemplo numérico.

Resolver a equação

$$7x^2-21x=0.$$

Colocando em evidência a incógnita, vem

$$x(7x-21)=0.$$

Anulando o primeiro fator do produto indicado no primeiro membro, resulta

$$x'=0.$$

Por outro lado, fazendo

$$7x-21=0,$$

encontramos

$$7x=21$$

$$x''=3.$$

As raízes da equação proposta são, pois,

$$\begin{cases} x' = 0 \\ x'' = 3. \end{cases}$$

2.º Seja a equação

$$ax^2 + c = 0.$$

Transpondo o têrmo independente, temos

$$ax^2 = -c.$$

Dividindo ambos os membros por a, vem

$$x^2 = -\frac{c}{a}.$$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os membros, resulta

$$x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Separando as raízes, encontramos

$$x' = \sqrt{-\frac{c}{a}} \quad \text{e} \quad x'' = -\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Consideremos um exemplo numérico.
Resolver a equação

$$3x^2 - 12 = 0.$$

Transpondo o têrmo 12, temos

$$3x^2 = 12.$$

Dividindo ambos os membros por 3, vem

$$x^2 = \frac{12}{3}.$$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os membros, resulta

$$x = \pm\sqrt{\frac{12}{3}},$$

ou, efetuando a divisão indicada no 2.º membro,

$$x = \pm\sqrt{4},$$

ou, ainda, extraindo a raiz,

$$x = \pm 2.$$

Finalmente, separando as raízes, encontramos

$$\begin{cases} x' = 2 \\ x'' = -2. \end{cases}$$

3.º Seja a equação

$$ax^2 = 0.$$

Imediatamente deduzimos

$$\begin{cases} x' = 0 \\ x'' = 0. \end{cases}$$

Consideremos um exemplo numérico.

Resolver a equação

$$5x^2 = 0.$$

Imediatamente deduzimos

$$\begin{cases} x' = 0 \\ x'' = 0. \end{cases}$$

118. **Resolução da equação completa.** — A equação geral do 2.º grau com uma incógnita

$$ax^2 + bx + c = 0$$

pode ser resolvida analìticamente por vários métodos distintos.

Entretanto, tendo em conta a natureza do presente curso, examinaremos, neste capítulo, apenas o método dos árabes e o de Viéte.

119. **Método dos árabes.** — Seja a equação

$$ax^2 + bx + c = 0. \qquad (1)$$

Passando o têrmo independente para o segundo membro vem

$$ax^2 + bx = -c,$$

ou, dividindo ambos os membros por a,

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}. \qquad (2)$$

Examinando os têrmos que se encontram no primeiro membro da equação supra, verificamos que podem ser considerados como os dois primeiros do desenvolvimento do quadrado de um binômio. Procuremos, pois, o têrmo que deverá completar o trinômio.

Ora, sendo x^2 o primeiro têrmo dêsse quadrado, segue-se que será x o primeiro têrmo do binômio. Por outro lado, como o têrmo $\frac{b}{a}x$ corresponde ao dôbro do produto dos têrmos do binômio, devemos ter, representado por m o seu segundo têrmo,

$$2xm = \frac{b}{a}x.$$

Simplificando o fator comum x e dividindo ambos os membros da equação acima por 2, vem

$$m = \frac{b}{2a}.$$

O têrmo que se deverá somar aos dois membros da equação (2) para transformar o primeiro em quadrado exato é, pois,

$$\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}.$$

Dessarte, ficará a equação (2) transformada na seguinte:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a},$$

à qual se poderá dar ainda a forma

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}.$$

Efetuando a subtração indicada no segundo membro, encontramos

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os membros, temos

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}},$$

ou, suprimindo o radical do denominador,

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

ou, transpondo para o segundo membro o têrmo independente,

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

ou, ainda,

$$\boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},}$$

fórmula resolutiva da equação geral do segundo grau com uma incógnita.

Separando as raízes, vem

$$\left|\begin{array}{l} x'=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\[2ex] x''=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \end{array}\right.$$

120. **Aplicações.** — Aplicando o método dos árabes, resolvamos as equações seguintes:

1.º Seja a equação

$$x^2-12x+35=0.$$

Transpondo 35 para o segundo membro, temos

$$x^2-12x=-35.$$

Para transformar o primeiro membro da equação acima em quadrado exato, devemos somar aos dois membros o têrmo

$$\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{12}{2}\right)^2=\frac{144}{4}=36.$$

Somando, pois, 36 a ambos os membros da equação encontramos

$$x^2 - 12x + 36 = 36 - 35$$

$$x^2 - 12x + 36 = 1$$

$$(x - 6)^2 = 1.$$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os membros, resulta

$$x - 6 = \pm \sqrt{1}$$

$$x - 6 = \pm 1,$$

ou, transpondo o têrmo independente,

$$x = 6 \pm 1.$$

Separando as raízes obtemos

$$\begin{cases} x' = 6 + 1 = 7 \\ x'' = 6 - 1 = 5. \end{cases}$$

2.º Resolver a equação

$$3x^2 + 5x - 42 = 0.$$

Transpondo 42 para o segundo membro, temos

$$3x^2 + 5x = 42.$$

Dividindo por 3 ambos os membros, vem

$$x^2 + \frac{5}{3}x = 14.$$

Somando a ambos os membros da equação o têrmo

$$\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{5}{2 \times 3}\right)^2 = \frac{25}{36},$$

encontramos

$$x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{25}{36} = 14 + \frac{25}{36},$$

ou

$$\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{529}{36}.$$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os membros, resulta

$$x+\frac{5}{6}=\pm\sqrt{\frac{529}{36}}$$

$$x+\frac{5}{6}=\pm\frac{23}{6}.$$

Transpondo o têrmo independente, temos

$$x=-\frac{5}{6}\pm\frac{23}{6},$$

ou, separando as raízes,

$$\left|\begin{array}{l} x'=-\dfrac{5}{6}+\dfrac{23}{6}=3 \\[2ex] x''=-\dfrac{5}{6}-\dfrac{23}{6}=-\dfrac{28}{6}=-\dfrac{14}{3}. \end{array}\right.$$

121. **Método de Viéte.** — Consiste o método de Viéte em reduzir a equação completa a um dos tipos incompletos. Consideremos a equação

$$ax^2+bx+c=0. \qquad (1)$$

Convencionemos para a variável o valor seguinte:

$$x=u+x', \qquad (2)$$

em que u é incógnita auxiliar e x' indeterminada.

Fazendo as substituições na equação acima, temos

$$a(u+x')^2+b(u+x')+c=0,$$

ou, desenvolvendo a potência indicada,

$$a(u^2+2ux'+x'^2)+b(u+x')+c=0.$$

Efetuando os produtos, vem

$$au^2+2aux'+ax'^2+bu+bx'+c=0,$$

ou

$$au^2+(2ax'+b)u+ax'^2+bx'+c=0. \qquad (3)$$

Anulando o coeficiente de u, transformaremos a equação acima num dos tipos incompletos.

Para isso façamos

$$2ax' + b = 0,$$

de onde deduzimos

$$2ax' = -b \quad \text{ou} \quad x' = -\frac{b}{2a}.$$

Substituindo x' pelo valor acima na equação (3) e notando que se anula o têrmo em u, vem

$$au^2 + a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = 0,$$

ou, efetuando,

$$au^2 + \frac{ab^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = 0,$$

ou, ainda,

$$au^2 + \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = 0.$$

Reduzindo os têrmos semelhantes e trocando os sinais da fração contida na equação, temos

$$au^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = 0.$$

Passando o têrmo independente para o segundo membro, resulta

$$au^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Dividindo ambos os membros pelo coeficiente de u, obtemos

$$u^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2},$$

de onde deduzimos

$$u = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \quad \text{ou} \quad u = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Substituindo, na expressão (2), u e x' pelos valores respectivos, encontramos

$$x = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{b}{2a},$$

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.}$$

122. **Aplicações.** — Aplicando o método de Viéte, resolvamos as equações seguintes:

1.º Seja a equação

$$6x^2 + 15x - 9 = 0.$$

Fazendo

$$x = u + x', \qquad (1)$$

temos

$$6(u + x')^2 + 15(u + x') - 9 = 0,$$

ou, desenvolvendo,

$$6(u^2 + 2ux' + x'^2) + 15u + 15x' - 9 = 0,$$

ou, ainda,

$$6u^2 + 12ux' + 6x'^2 + 15u + 15x' - 9 = 0.$$

Ordenando segundo as potências decrescentes de u e colocando-o em evidência, resulta

$$6u^2 + (12x' + 15)u + 6x'^2 + 15x' - 9 = 0. \qquad (2)$$

Fazendo agora

$$12x' + 15 = 0,$$

obtemos

$$12x' = -15 \quad \text{ou} \quad x' = -\frac{15}{12}. \qquad (3)$$

Substituindo x' pelo valor acima na equação (2), vem

$$6u^2 + \frac{6 \times 225}{144} - \frac{225}{12} - 9 = 0$$

ou

$$6u^2 + \frac{225}{24} - \frac{225}{12} - 9 = 0.$$

Eliminando os denominadores, temos

$$144u^2 + 225 - 450 - 216 = 0.$$

Transpondo e reduzindo os têrmos, encontramos

$$144u^2 = 441,$$

de onde tiramos

$$u = \pm \sqrt{\frac{441}{144}} \quad \text{ou} \quad u = \pm \frac{21}{12}.$$

Substituindo, na expressão (1), u e x' por seus respectivos valores, encontramos

$$x = \pm \frac{21}{12} - \frac{15}{12},$$

ou, separando as raízes,

$$\left| \begin{array}{l} x' = \dfrac{21}{12} - \dfrac{15}{12} = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2} \\[2ex] x'' = -\dfrac{21}{12} - \dfrac{15}{12} = -\dfrac{36}{12} = -3. \end{array} \right.$$

2.° Seja a equação

$$4x^2 + 3x - 45 = 0.$$

Fazendo

$$x = u + x', \tag{1}$$

temos

$$4(u + x')^2 + 3(u + x') - 45 = 0,$$

ou, desenvolvendo,

$$4(u^2 + 2ux' + x'^2) + 3u + 3x' - 45 = 0,$$

ou

$$4u^2 + 8ux' + 4x'^2 + 3u + 3x' - 45 = 0.$$

Ordenando em relação às potências decrescentes de u e colocando-o em evidência, vem

$$4u^2 + (8x' + 3)u + 4x'^2 + 3x' - 45 = 0. \tag{2}$$

Fazendo

$$8x' + 3 = 0,$$

resulta

$$8x' = -3 \quad \text{ou} \quad x' = -\frac{3}{8}. \tag{3}$$

Substituindo x' pelo valor acima na equação (2), encontramos

$$4u^2 + \frac{4 \times 9}{64} - \frac{3 \times 3}{8} - 45 = 0,$$

ou

$$4u^2 + \frac{9}{16} - \frac{9}{8} - 45 = 0.$$

Eliminando os denominadores, obtemos

$$64u^2 + 9 - 18 - 720 = 0,$$

ou, transpondo e reduzindo os têrmos,

$$64u^2 = 729,$$

de onde tiramos

$$u = \pm\sqrt{\frac{729}{64}} \quad \text{ou} \quad u = \pm\frac{27}{8}.$$

Substituindo, na expressão (1), u e x' por seus respectivos valores, vem

$$x = \pm\frac{27}{8} - \frac{3}{8},$$

ou, separando as raízes,

$$\left|\begin{array}{l} x' = \frac{27}{8} - \frac{3}{8} = \frac{24}{8} = 3 \\[2ex] x'' = -\frac{27}{8} - \frac{3}{8} = -\frac{15}{4}. \end{array}\right.$$

123. **Aplicações da fórmula.** — Na prática, servimo-nos da fórmula

$$x = \frac{-b \pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

para resolver as equações numéricas do 2.º grau, depois de reduzidas ao tipo geral.

Consideremos alguns exemplos.

1.º Resolver a equação

$$3x^2 + 7x + 4 = 0.$$

Temos

$$a = 3$$
$$b = 7$$
$$c = 4.$$

Substituindo, pois, na fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

as letras a, b, c pelos números dados, encontramos

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 48}}{6}.$$

Efetuando as operações indicadas, vem

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{1}}{6}$$

$$x = \frac{-7 \pm 1}{6}.$$

Separando as raízes, temos

$$\left| \begin{aligned} x' &= \frac{-7+1}{6} = -\frac{6}{6} = -1 \\ x'' &= \frac{-7-1}{6} = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}. \end{aligned} \right.$$

2.º Resolver a equação

$$8x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Temos

$$a = 8$$
$$b = -2$$
$$c = -3.$$

Aplicando, pois, a fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

encontramos, sucessivamente,

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 96}}{16}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{100}}{16}$$

$$x = \frac{2 \pm 10}{16}.$$

Separando as raízes, vem

$$\begin{cases} x' = \dfrac{2+10}{16} = \dfrac{12}{16} = \dfrac{3}{4} \\ x'' = \dfrac{2-10}{16} = -\dfrac{8}{16} = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

124. Simplificações da fórmula. — A fórmula geral

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

pode ser simplificada nos casos seguintes:

1.º) *quando o coeficiente de* x² *é a unidade;*

2.º) *quando o coeficiente de* x *é número par.*

I. Com efeito, no primeiro caso a equação pode ser escrita sob a forma

$$x^2 + px + q = 0,$$

em que p representa o coeficiente de x e q o têrmo independente.

Aplicando a essa equação a fórmula geral, obtemos

$$x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2},$$

expressão que pode ser escrita assim

$$x = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2},$$

ou, introduzindo o denominador da segunda fração no radical,

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2 - 4q}{4}},$$

ou, ainda, decompondo a fração do radicando,

$$\boxed{x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.}$$

II. Admitamos, agora, que o coeficiente de x é número par, isto é,

$$b = 2k.$$

Substituindo, na fórmula geral,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

b por $2k$, encontramos

$$x = \frac{-2k \pm \sqrt{4k^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-2k \pm \sqrt{4(k^2 - ac)}}{2a},$$

ou, tirando o fator 4 do radical,

$$x = \frac{-2k \pm 2\sqrt{k^2 - ac}}{2a},$$

ou, ainda, dividindo os têrmos da fração por 2,

$$\boxed{x = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}.}$$

125. EXERCÍCIOS.

Resolver as equações seguintes:

1. $x^2 + 5x + 6 = 0$. R. $x' = -2$, $x'' = -3$.
2. $x^2 + 6x + 5 = 0$. R. $x' = -1$, $x'' = -5$.
3. $x^2 - 3x + 2 = 0$. R. $x' = 2$, $x'' = 1$.
4. $x^2 - 5x + 6 = 0$. R. $x' = 3$, $x'' = 2$.

5. $x^2 - 8x + 15 = 0$. R. $x' = 5$, $x'' = 3$.

6. $x^2 - 16x + 60 = 0$. R. $x' = 10$, $x'' = 6$.

7. $x^2 - 23x + 120 = 0$. R. $x' = 15$, $x'' = 8$.

8. $x^2 + x - 12 = 0$. R. $x' = 3$, $x'' = -4$.

9. $x^2 + 3x - 4 = 0$. R. $x' = 1$, $x'' = -4$.

10. $x^2 - 2x - 8 = 0$. R. $x' = 4$, $x'' = -2$.

11. $3x^2 + 4x + 1 = 0$. R. $x' = -\dfrac{1}{3} = x'' = -1$.

12. $3x^2 + 4x - 4 = 0$. R. $x' = \dfrac{2}{3}$, $x'' = -2$.

13. $5x^2 + 12x + 4 = 0$. R. $x' = -\dfrac{2}{5}$, $x'' = -2$.

14. $5x^2 + 13x - 6 = 0$. R. $x' = \dfrac{2}{5}$, $x'' = -3$.

15. $3x^2 - 11x - 20 = 0$. R. $x' = 5$, $x'' = -\dfrac{4}{3}$.

16. $7x^2 - 17x - 12 = 0$. R. $x' = 3$, $x'' = -\dfrac{4}{7}$.

17. $4x^2 - 20x + 9 = 0$. R. $x' = \dfrac{9}{2}$, $x'' = \dfrac{1}{2}$.

18. $12x^2 + x - 6 = 0$. R. $x' = \dfrac{2}{3}$, $x'' = -\dfrac{3}{4}$.

19. $12x^2 - 7x + 1 = 0$. R. $x' = \dfrac{1}{3}$, $x'' = \dfrac{1}{4}$.

20. $25x^2 - 25x + 6 = 0$. R. $x' = \dfrac{3}{5}$, $x'' = \dfrac{2}{5}$.

21. $\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{11x}{6} - \dfrac{5}{3} = 0$. R. $x' = \dfrac{5}{6}$, $x'' = -10$.

22. $\dfrac{5x^2}{3} - \dfrac{39x}{20} + \dfrac{21}{100} = 0$. R. $x' = \dfrac{21}{20}$, $x'' = \dfrac{3}{25}$.

23. $\dfrac{x+2}{x+3} + \dfrac{x-1}{x-2} = \dfrac{5x+2}{x+3}$. R. $x' = 3$; $x'' = \dfrac{1}{3}$.

24. $\dfrac{7}{3x-1} + \dfrac{5}{2x-3} = \dfrac{17}{5x-11}$. R. $x' = 5$; $x'' = \dfrac{47}{43}$.

25. $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+2{,}2} = 0$. R. $x' = \dfrac{1}{5}$; $x'' = -\dfrac{5}{3}$.

26. $\dfrac{(x+1)(x-1)}{(x-2)(3x-1)}=1.$ R. $x'=3;\ x''=\dfrac{1}{2}.$

27. $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\left(x+\dfrac{13}{12}\right)=\left(\dfrac{1}{3}-x\right)\left(\dfrac{47}{4}+x\right).$

R. $x'=\dfrac{1}{4};\ x''=-\dfrac{27}{4}.$

28. $x^2+2x-a^2+1=0.$ R. $x'=a-1;\ x''=-a-1.$

29. $4x^2-4ax+a^2-b^2=0.$ R. $x'=\dfrac{a+b}{2};\ x''=\dfrac{a-b}{2}.$

30. $a^2x^2-b^2x^2-2a^2bx+a^2b^2=0.$ R. $x'=\dfrac{ab}{a-b};\ x''=\dfrac{ab}{a+b}.$

126. **Existência das raízes no campo real.** — A fórmula geral de resolução das equações do 2.º grau com uma incógnita,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

contém o radicando

$$b^2-4ac,$$

denominado *discriminante* da equação.

Dêsse radicando depende a existência de raízes no campo real.

Assim é que, quando

$$b^2-4ac>0,$$

podemos extrair a raiz quadrada indicada na fórmula, obtendo dois valores desiguais para x.

A equação tem, então, duas raízes desiguais.

Por outro lado, quando

$$b^2-4ac=0,$$

obtemos dois valores iguais para x.

Entretanto, quando o discriminante é negativo,

$$b^2-4ac<0,$$

não se pode extrair a raiz indicada na fórmula.

Dizemos, neste caso, que a equação não tem raízes no campo real.

127. Discussão. — Como vimos, a natureza das raízes da equação do 2.º grau, dadas pela fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

depende do discriminante da equação:

$$b^2 - 4ac.$$

Em relação a êsse discriminante, podemos formular três hipóteses:

$$b^2 - 4ac > 0$$
$$b^2 - 4ac = 0$$
$$b^2 - 4ac < 0.$$

128. 1.º caso. — Sendo positivo o discriminante,

$$b^2 - 4ac > 0,$$

a equação tem duas raízes *reais*.

Além disso, como uma das raízes é dada pela soma e a outra pela diferença de duas quantidades que não são nulas, segue-se que as raízes são *desiguais*.

Por outro lado, podem ser consideradas três hipóteses quanto ao têrmo independente:

$$c > 0, \quad c = 0, \quad c < 0.$$

I. Quando $c > 0$, o têrmo $4ac$ é negativo; logo, o valor absoluto do radical é menor que o de b.

Assim, as raízes da equação terão o *mesmo sinal*, contrário ao de b.

II. Quando $c = 0$, o têrmo $4ac$ é nulo. — Portanto:

$$\left| \begin{array}{l} x' = \dfrac{-b+b}{2a} = \dfrac{0}{2a} = 0 \\[2ex] x'' = \dfrac{-b-b}{2a} = -\dfrac{2b}{2a} = -\dfrac{b}{a}. \end{array} \right.$$

Assim, uma das raízes é nula e a outra igual a

$$-\frac{b}{a}.$$

III. Quando $c<0$, o têrmo $4ac$ é positivo; logo, o valor absoluto do radical é maior que o de b.

Assim, as raízes da equação têm *sinais distintos*, e a maior em valor absoluto tem sinal contrário ao de b.

129. **2.º caso.** — Sendo nulo e discriminante,

$$b^2-4ac=0,$$

resultarão para as raízes os seguintes valores:

$$\left| \begin{array}{l} x'=\dfrac{-b+0}{2a}=-\dfrac{b}{2a} \\[2ex] x''=\dfrac{-b-0}{2a}=-\dfrac{b}{2a}. \end{array} \right.$$

As raízes são, pois, *reais, iguais*, do *mesmo sinal*, contrário ao de b.

130. **3.º caso.** — Sendo negativo o discriminante,

$$b^2-4ac<0,$$

a equação não admite raízes, pois os números negativos não têm raiz quadrada.

131. **Resumo da discussão.** — Conforme os resultados obtidos, temos

$$\boxed{\begin{array}{l} b^2-4ac>0\text{: raízes reais e desiguais} \\ b^2-4ac=0\text{: raízes reais e iguais} \\ b^2-4ac<\ \text{: não há raiz.} \end{array}}$$

132. **Observação.** — Quando o têrmo independente da equação (c) é negativo, pode-se imediatamente concluir que as raízes são reais e desiguais, por isso que, neste caso, temos sempre

$$b^2-4ac>0.$$

133. **Aplicações.** — De acôrdo com o estabelecido nos parágrafos anteriores, é sempre possível prever a natureza das raízes de uma equação do segundo grau, sem resolvê-la.

Consideremos alguns exemplos.

1.º Seja a equação

$$x^2 - 16x + 60 = 0.$$

Formando o discriminante, vem

$$b^2 - 4ac = (-16)^2 - 4 \times 60 = 16.$$

Como o discriminante é positivo, segue-se que as raízes são reais e desiguais.

Além disso, como

$$c > 0,$$

as raízes têm o mesmo sinal, contrário ao de b, isto é, são positivas.

As raízes da equação proposta são, pois, *reais, desiguais* e *positivas.*

2.º Seja a equação

$$x^2 - 2x - 8 = 0.$$

Como o têrmo independente da equação é negativo (n. 132)

$$c < 0,$$

segue-se que as raízes são *reais* e *desiguais,* e bem assim que têm *sinais contrários.*

3.º Seja a equação

$$9x^2 - 12x + 4 = 0.$$

Formando o discriminante, vem

$$b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \times 9 \times 4 = 0.$$

Sendo nulo o discriminante, segue-se que as raízes são *reais* e *iguais,* e bem assim que têm o mesmo sinal, contrário ao de b, isto é, são *positivas.*

4.º Seja a equação

$$3x^2 + 4x + 5 = 0.$$

Formando o discriminante, vem

$$b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times 3 \times 5 = -44.$$

Como o discriminante é negativo, segue-se que a equação proposta não tem raízes.

134. Relações entre os coeficientes e as raízes. — 1.ª *A soma das raízes da equação do 2.º grau é igual ao quociente, trocado de sinal, do coeficiente do segundo têrmo da equação pelo coeficiente do primeiro têrmo.*

Como vimos, a equação do 2.º grau

$$ax^2 + bx + c = 0$$

é resolvida pela fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Separando as raízes, vem

$$\left| \begin{array}{l} x' = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\[2ex] x'' = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \end{array} \right.$$

Somando ordenadamente as expressões acima, encontramos

$$x' + x'' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ou, reduzindo os têrmos semelhantes,

$$x' + x'' = -\frac{2b}{2a},$$

ou, simplificando a fração,

$$\boxed{x' + x'' = -\frac{b}{a}.}$$

2.ª *O produto das raízes da equação do 2.º grau é igual ao quociente do têrmo independente pelo coeficiente do primeiro têrmo da equação.*

Consideremos as raízes da equação do 2.° grau

$$\left|\begin{array}{l} x' = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\[2ex] x'' = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \end{array}\right.$$

Multiplicando ordenadamente as expressões supra, obtemos

$$x' \times x'' = \frac{\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)}{4a^2}.$$

Observando que o numerador da fração é constituído pelo produto da soma pela diferença de duas expressões, teremos, de acôrdo com a regra conhecida,

$$x' \times x'' = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2},$$

ou, suprimindo os parênteses e reduzindo os têrmos semelhantes,

$$x' \times x'' = \frac{4ac}{4a^2},$$

ou, simplificando a fração,

$$\boxed{x' \times x'' = \frac{c}{a}.}$$

135. **Sinal das raízes.** — Aplicando as propriedades estabelecidas no parágrafo precedente, podemos reconhecer, sem resolver a equação nem discuti-la, os sinais de suas raízes, caso existam.

Com efeito, temos

$$x' \times x'' = \frac{c}{a}.$$

Assim, se o quociente de c por a fôr positivo, as duas raízes terão o mesmo sinal; se fôr negativo, terão sinais contrários.

Por outro lado, temos

$$x' + x'' = -\frac{b}{a}.$$

Assim, quando as raízes têm o mesmo sinal, êste será o de

$$-\frac{b}{a}.$$

136. **Composição da equação dadas as raízes.** — As relações entre os coeficientes e as raízes (n. 134) permitem formar uma equação do 2.º grau cujas raízes são dadas.

Consideremos alguns exemplos.

1.º Formar a equação cujas raízes são

$$x' = 8 \quad \text{e} \quad x'' = 5.$$

De acôrdo com as propriedades das raízes (n. 134), temos

$$x' + x'' = -\frac{b}{a} \quad \text{ou} \quad 13 = -\frac{b}{a} \quad \text{ou} \quad \frac{b}{a} = -13$$

$$x' \times x'' = \frac{c}{a} \quad \text{ou} \quad 40 = \frac{c}{a} \quad \text{ou} \quad \frac{c}{a} = 40.$$

Consideremos, agora, a equação geral

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Dividindo ambos os membros por a, vem

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Substituindo $\frac{b}{a}$ e $\frac{c}{a}$ pelos valores obtidos, resulta

$$x^2 - 13x + 40 = 0.$$

2.º Formar a equação cujas raízes são:

$$x' = \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad x'' = -\frac{1}{5}.$$

De acôrdo com as propriedades das raízes, temos

$$x' + x'' = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20} \quad \text{ou} \quad \frac{b}{a} = -\frac{1}{20}$$

$$x' \times x'' = \frac{1}{4} \times \left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{1}{20} \quad \text{ou} \quad \frac{c}{a} = -\frac{1}{20}.$$

Consideremos, agora, a equação geral

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Dividindo ambos os membros por a, resulta

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Substituindo $\frac{b}{a}$ e $\frac{c}{a}$ pelos valores obtidos, vem

$$x^2 - \frac{1}{20}x - \frac{1}{20} = 0,$$

ou, eliminando os denominadores,

$$20x^2 - x - 1 = 0.$$

137. EXERCÍCIOS.

Compor as equações do 2.º grau cujas raízes são:

1. $x' = 5,\ x'' = 2.$ R. $x^2 - 7x + 10 = 0.$
2. $x' = 7,\ x'' = 4.$ R. $x^2 - 11x + 28 = 0.$
3. $x' = 8,\ x'' = 5.$ R. $x^2 - 13x + 40 = 0.$
4. $x' = 9,\ x'' = 4.$ R. $x^2 - 13x + 36 = 0.$
5. $x' = 10,\ x'' = 3.$ R. $x^2 - 13x + 30 = 0.$
6. $x' = 4,\ x'' = -3.$ R. $x^2 - x - 12 = 0.$
7. $x' = 6,\ x'' = -5.$ R. $x^2 - x - 30 = 0.$
8. $x' = 6,\ x'' = -7.$ R. $x^2 + x - 42 = 0.$
9. $x' = -7,\ x'' = 5.$ R. $x^2 + 2x - 35 = 0.$
10. $x' = -8,\ x'' = -4.$ R. $x^2 + 12x + 32 = 0.$
11. $x' = -9,\ x'' = -5.$ R. $x^2 + 14x + 45 = 0.$

12. $x' = 2,\ x'' = \frac{3}{4}$. R. $4x^2 - 11x + 6 = 0$.

13. $x' = 3,\ x'' = -\frac{1}{2}$. R. $2x^2 - 5x - 3 = 0$.

14. $x' = \frac{1}{2},\ x'' = \frac{1}{3}$. R. $6x^2 - 5x + 1 = 0$.

15. $x' = \frac{1}{3},\ x'' = \frac{1}{4}$. R. $12x^2 - 7x + 1 = 0$.

16. $x' = \frac{1}{4},\ x'' = \frac{1}{5}$. R. $20x^2 - 9x + 1 = 0$.

17. $x' = -\frac{3}{4},\ x'' = \frac{2}{5}$. R. $20x^2 + 7x - 6 = 0$.

18. $x' = a,\ x'' = \frac{a}{2}$. R. $2x^2 - 3ax + a^2 = 0$.

19. $x' = \frac{a}{2},\ x'' = \frac{a}{3}$. R. $6x^2 - 5ax + a^2 = 0$.

20. $x' = \frac{2a}{3},\ x'' = \frac{3a}{5}$. R. $15x^2 - 19ax + 6a^2 = 0$.

138. **Aplicação.** — *Determinar dois números cuja soma e cujo produto são dados.*

Seja s a soma e p o produto dos números pedidos.

Considerando êsses números como raízes da equação

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0,$$

temos

$$-\frac{b}{a} = s \quad \text{e} \quad \frac{c}{a} = p.$$

Exemplo: determinar dois números cuja soma é 9 e cujo produto é 20.

Temos

$$-\frac{b}{a} = 9 \quad \text{e} \quad \frac{c}{a} = 20.$$

Formamos, assim, a equação

$$x^2 - 9x + 20 = 0.$$

Aplicando a fórmula, vem

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 80}}{2}.$$

Efetuando as operações indicadas e separando as raízes, encontramos

$$\begin{cases} x' = 5 \\ x'' = 4. \end{cases}$$

Os números procurados são, pois, 5 e 4.

139. **Aplicação a sistemas simples do 2.º grau.** — Um sistema de duas equações com duas incógnitas diz-se do *segundo grau,* quando pelo menos uma das suas equações é do segundo grau. — Exemplo:

$$\begin{cases} x + y = b \\ x^2 + y^2 = c. \end{cases}$$

Há sistemas simples do 2.º grau que podem ser resolvidos por intermédio das propriedades das raízes da equação do 2.º grau.

Um sistema de duas equações com duas incógnitas que não se altera permutando-se as incógnitas denomina-se *simétrico.*

Os sistemas simétricos mais simples são os do tipo

$$\begin{cases} x + y = a \\ xy = b. \end{cases}$$

Consideremos alguns sistemas simétricos.

1.º *Resolver o sistema*

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ xy = 10. \end{cases}$$

As incógnitas que figuram nas equações do sistema são raízes da equação

$$z^2 - 7z + 10 = 0.$$

Aplicando a fórmula, vem

$$z = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2}.$$

Efetuando as operações indicadas e separando as raízes, encontramos

$$\begin{cases} z' = 5 \\ z'' = 2. \end{cases}$$

As soluções do sistema são, pois,

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 5. \end{cases}$$

2.º *Resolver o sistema*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 12. \end{cases}$$

Multiplicando a segunda equação por 2, vem

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 2xy = 24. \end{cases}$$

Somando essas equações obtemos

$$x^2 + 2xy + y^2 = 49.$$
$$(x + y)^2 = 49.$$
$$x + y = \pm 7.$$

Formamos, assim, os dois sistemas

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ xy = 12 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x + y = -7 \\ xy = 12. \end{cases}$$

Resolvendo êsses sistemas, encontramos

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases} \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases} \begin{cases} x = -4 \\ y = -3 \end{cases} \begin{cases} x = -3 \\ y = -4. \end{cases}$$

3.º *Resolver o sistema*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 34 \\ x + y = 8. \end{cases}$$

Elevando ao quadrado a segunda equação, vem

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 64 \\ x^2 + y^2 = 34. \end{cases}$$

Subtraindo ordenadamente essas equações, obtemos

$$2xy = 30$$
$$xy = 15.$$

Forma-se, dêsse modo, o sistema

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ xy = 15. \end{cases}$$

Resolvendo-o, encontramos

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 5. \end{cases}$$

140. **Observação.** — Seguindo a mesma marcha aplicada nos exemplos anteriores, podemos resolver os sistemas do tipo

$$\begin{cases} x - y = a \\ xy = b, \end{cases}$$

os quais não são simétricos.

Consideremos um exemplo.

Resolver o sistema

$$\begin{cases} x - y = 5 \\ xy = 14. \end{cases}$$

Multiplicando a segunda equação por -1, o sistema pode ser pôsto sob a forma

$$\begin{cases} x + (-y) = 5 \\ x(-y) = -14. \end{cases}$$

As incógnitas que figuram nesse sistema são, pois, raízes da equação

$$z^2 - 5z - 14 = 0.$$

Aplicando a fórmula, vem

$$z = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 56}}{2}.$$

Efetuando as operações indicadas e separando as raízes, encontramos

$$\begin{cases} z' = 7 \\ z'' = -2. \end{cases}$$

Temos, assim,

$$\begin{cases} x = 7 \\ -y = -2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = -2 \\ -y = 7. \end{cases}$$

As soluções do sistema proposto são, pois

$$\begin{cases} x = 7 \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = -2 \\ y = -7. \end{cases}$$

141. EXERCÍCIOS.

Resolver os sistemas seguintes:

1. $\begin{cases} x + y = 10 \\ xy = 21. \end{cases}$ R. $\begin{cases} x = 7 \\ y = 3 \end{cases}$ e $\begin{cases} x = 3 \\ y = 7. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + y = 12 \\ xy = 35. \end{cases}$ R. $\begin{cases} x = 7 \\ y = 5 \end{cases}$ e $\begin{cases} x = 5 \\ y = 7. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x + y = 13 \\ xy = 36. \end{cases}$ R. $\begin{cases} x = 9 \\ y = 4 \end{cases}$ e $\begin{cases} x = 4 \\ y = 9. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + y = 15 \\ xy = 44. \end{cases}$ R. $\begin{cases} x = 11 \\ y = 4 \end{cases}$ e $\begin{cases} x = 4 \\ y = 11 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 61 \\ x + y = 11. \end{cases}$ R. $\begin{cases} x = 6 \\ y = 5 \end{cases}$ e $\begin{cases} x = 5 \\ y = 6. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 58 \\ x + y = 10. \end{cases}$ R. $\begin{cases} x = 7 \\ y = 3 \end{cases}$ e $\begin{cases} x = 3 \\ y = 7. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 73 \\ x + y = 11. \end{cases}$ R. $\begin{cases} x = 8 \\ y = 3 \end{cases}$ e $\begin{cases} x = 3 \\ y = 8. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 149 \\ x + y = 17. \end{cases}$ R. $\begin{cases} x = 10 \\ y = 7 \end{cases}$ e $\begin{cases} x = 7 \\ y = 10. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x - y = 3 \\ xy = 18. \end{cases}$ R. $\begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases}$ e $\begin{cases} x = -3 \\ y = -6. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x - y = 7 \\ xy = 30. \end{cases}$ R. $\begin{cases} x = 10 \\ y = 3 \end{cases}$ e $\begin{cases} x = -3 \\ y = -10. \end{cases}$

Capítulo VII

PROBLEMAS DO 2.º GRAU

142. **Preliminares.** — Recordemos que o grau de um problema é dado pelo da equação ou sistema de equações a que o seu enunciado conduz.

Assim, dizem-se do 2.º grau os problemas cujos enunciados originam equações do 2.º grau.

Tendo em vista as três fases de que consta a resolução de qualquer problema — estabelecimento da equação, resolução desta e discussão — cuidemos, neste capítulo, dos problemas do 2.º grau com uma incógnita.

143. **Problemas particulares.** — I. *Procurar um número cujo produto da metade pela têrça parte seja 96.*

Representando por x o número procurado, estabelecemos imediatamente a equação

$$\frac{x}{2} \times \frac{x}{3} = 96.$$

Resolvendo-a, encontramos

$$\frac{x^2}{6} = 96,$$

$$x^2 = 576$$

$$x = \pm \sqrt{576},$$

$$x = \pm 24,$$

ou separando as raízes,

$$x' = 24 \quad \text{e} \quad x'' = -24.$$

As raízes da equação, 24 e -24, satisfazem o enunciado do problema.

II. *A soma de certo número com o seu inverso é* $\frac{25}{12}$. *Qual é o número?*

Designando por x o número procurado, o seu inverso será expresso por

$$\frac{1}{x}.$$

Como $\frac{25}{12}$ é a soma de ambos, temos

$$x+\frac{1}{x}=\frac{25}{12},$$

equação do problema. Preparando-a, vem

$$12x^2+12=25x$$

$$12x^2-25x+12=0.$$

Aplicando a fórmula conhecida, encontramos

$$x=\frac{25\pm\sqrt{25^2-4\times12\times12}}{2\times12}$$

$$x=\frac{25\pm\sqrt{625-576}}{24}$$

$$x=\frac{25\pm\sqrt{49}}{24}$$

$$x=\frac{25\pm7}{24},$$

ou separando as raízes,

$$\left|\begin{array}{l} x'=\frac{25+7}{24}=\frac{32}{24}=\frac{4}{3} \\ x''=\frac{25-7}{24}=\frac{18}{24}=\frac{3}{4}. \end{array}\right.$$

As raízes da equação satisfazem o problema.

III. *Um automóvel, animado de velocidade uniforme, percorre, em certo tempo, 360 km; entretanto, se a sua velocidade fôsse diminuida de 30 km horários, o tempo necessário para igual percurso seria acrescido de duas horas. Qual era a velocidade?*

Designando por x a velocidade do automóvel na primeira hipótese, o tempo empregado no percurso seria

$$\frac{360}{x}.$$

Por outro lado, como a velocidade na segunda hipótese é expressa por $x-30$, o tempo necessário para o percurso seria

$$\frac{360}{x-30}.$$

Como a diferença entre os intervalos de tempo é de duas horas, temos

$$\frac{360}{x-30}-\frac{360}{x}=2,$$

equação do problema. Preparando-a, vem

$$360x-360\,(x-30)=2x\,(x-30)$$

$$360x-360x+10800=2x^2-60x$$

$$2x^2-60x-10800=0.$$

Eliminando o fator comum 2 aos têrmos da equação, resulta

$$x^2-30x-5400=0.$$

Aplicando a fórmula, encontramos

$$x=\frac{30\pm\sqrt{30^2+4\times5400}}{2}$$

$$x=\frac{30\pm\sqrt{900+21600}}{2}$$

$$x=\frac{30\pm\sqrt{22500}}{2}$$

$$x=\frac{30\pm150}{2}.$$

Separando as raízes, vem

$$\begin{cases} x' = \dfrac{30+150}{2} = \dfrac{180}{2} = 90 \\ x'' = \dfrac{30-150}{2} = -\dfrac{120}{2} = -60. \end{cases}$$

Notando que apenas o primeiro dos valores obtidos é compatível com o problema no sentido do enunciado, infere-se que a velocidade procurada é 90 km/h.

IV. *Calcular a base e a altura de um triângulo, sabendo-se que a primeira excede a segunda de 3 m e que a área do triângulo é 35 m².*

Representando por x a altura do triângulo, a sua base será expressa por

$$x+3.$$

Como a área da figura é dada pelo semiproduto da base pela altura (Curso de Matem., 2.ª série, n. 10), temos

$$\frac{x(x+3)}{2} = 35,$$

equação do problema. Preparando-a, vem

$$x^2+3x=70$$
$$x^2+3x-70=0.$$

Aplicando a fórmula, encontramos

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+280}}{2}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{289}}{2}$$

$$x = \frac{-3 \pm 17}{2}$$

ou, separando as raízes,

$$\begin{cases} x' = \dfrac{-3+17}{2} = \dfrac{14}{2} = 7. \\ x'' = \dfrac{-3-17}{2} = -\dfrac{20}{2} = -10. \end{cases}$$

Notando que apenas a primeira das soluções encontradas convém ao problema, segue-se que a altura procurada é 7 m e que a base é

$$7+3=10\,\text{m}.$$

V. *Determinar o número de lados do polígono, em o qual se podem traçar 14 diagonais distintas.*

O número de diagonais de um polígono em função do número de lados é dado pela fórmula (Curso de Matem., 3.ª série n. 269).

$$D=\frac{(n-3)\,n}{2}.$$

Aplicando-a, temos

$$14=\frac{(n-3)\,n}{2},$$

ou, eliminando o denominador,

$$28=n^2-3n,$$

ou, transpondo os têrmos,

$$n^2-3n-28=0.$$

Resolvendo a equação acima, encontramos

$$n=\frac{3\pm\sqrt{3^2+4\times 28}}{2}$$

$$n=\frac{3\pm\sqrt{9+112}}{2}$$

$$n=\frac{3\pm\sqrt{121}}{2}$$

$$n=\frac{3\pm 11}{2}$$

ou, separando as raízes,

$$\left|\begin{array}{l} n'=\dfrac{3+11}{2}=7 \\[2ex] n''=\dfrac{3-11}{2}=-4. \end{array}\right.$$

Notando que convém ao caso apenas a raiz positiva temos

$$n = 7.$$

144. **Problemas gerais.** — I. *Dividindo um número dado*, n, *por dois outros, a diferença entre os respectivos quocientes é* d; *determinar o primeiro divisor, sabendo que o segundo o excede de* a.

Designando por x o primeiro divisor, o segundo será

$$x + a,$$

e os quocientes respectivos serão

$$\frac{n}{x} \quad \text{e} \quad \frac{n}{x+a}.$$

Como d é a diferença entre os quocientes, temos

$$\frac{n}{x} - \frac{n}{x+a} = d,$$

equação que resolve o problema. Preparando-a, vem

$$n(x+a) - nx = dx(x+a)$$
$$nx + an - nx = dx^2 + adx$$
$$dx^2 + adx - an = 0.$$

Aplicando a fórmula, encontramos

$$x = \frac{-ad \pm \sqrt{a^2d^2 + 4adn}}{2d}.$$

Resolvido o problema, procuremos dar forma mais simples à expressão acima.

Separando a fração que se encontra no segundo membro, temos

$$x = -\frac{ad}{2d} \pm \frac{\sqrt{a^2d^2 + 4adn}}{2d}.$$

Eliminando o fator comum, d, aos têrmos da primeira fração e introduzindo, sob o radical, o têrmo $2d$, resulta

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2d^2 + 4adn}{4d^2}},$$

ou, colocando d em evidência no numerador do radicando,

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{d(a^2d + 4an)}{4d^2}},$$

ou, ainda, eliminando d,

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2d + 4an}{4d}}.$$

Separando a fração que se encontra sob o radical, obtemos,

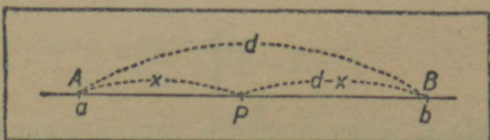
$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2d}{4d} + \frac{4an}{4d}},$$

ou, simplificando,

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{an}{d}}.$$

II. *Determinar, sôbre a reta que passa por duas fontes luminosas de intensidade diferente, a posição de um ponto igualmente iluminado por ambas.* (Problema das luzes).

Suponhamos as fontes situadas em A e B, à distância d, tendo, respectivamente, as intensidades a e b para unidade de distância, e seja P o ponto igualmente iluminado por ambas.



A resolução do problema depende, inicialmente, do conhecimento da lei física que regula o fenômeno. E essa lei diz que a intensidade luminosa recebida em um ponto é inversamente proporcional ao quadrado da distância que o separa do foco emanador.

Sendo x a distância entre A e P, entre P e B será

$$d - x.$$

Por serem a e b as intensidades luminosas por unidade de distância, as quantidades de luz recebidas pelo ponto em questão das duas fontes são expressas, respectivamente, pelas relações

$$\text{(do ponto A)} \qquad \frac{a}{x^2}$$

$$\text{(do ponto B)} \qquad \frac{b}{(d-x)^2}.$$

Mas, como devem ser iguais essas quantidades, temos

$$\frac{a}{x^2} = \frac{b}{(d-x)^2},$$

equação do problema proposto.

Para facilitar a resolução dessa equação, recorremos a um artifício. Escrevamos a equação do modo seguinte:

$$\frac{(d-x)^2}{x^2} = \frac{b}{a}.$$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os membros, vem

$$\frac{d-x}{x} = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Separando a fração do 1.º membro, temos

$$\frac{d}{x} - 1 = \pm\sqrt{\frac{b}{a}},$$

ou, transpondo o têrmo numérico para o segundo membro,

$$\frac{d}{x} = 1 \pm \sqrt{\frac{b}{a}},$$

de onde se deduz

$$x = \frac{d}{1 \pm \sqrt{\frac{b}{a}}}.$$

Separando as raízes, encontramos

$$\left|\begin{array}{l} x' = \dfrac{d}{1+\sqrt{\dfrac{b}{a}}} \\[2ex] x'' = \dfrac{d}{1-\sqrt{\dfrac{b}{a}}}. \end{array}\right.$$

Discussão: Em relação à intensidade luminosa dos focos, podemos fazer as considerações seguintes:

$$a > b$$
$$a = b$$
$$a < b.$$

I. Quando $a > b$, a fração $\dfrac{b}{a}$ é própria, e portanto menor que a unidade. — Conseqüentemente:

$$\sqrt{\frac{b}{a}} < 1.$$

Tendo em vista a desigualdade decorrente da hipótese, fácil é concluir que, além de *reais* e *desiguais*, são *positivas* as raízes dadas pelas fórmulas acima, o que indica existirem dois pontos, situados à direita de A, igualmente iluminados pelas fontes.

Notemos ainda que, sendo

$$\frac{b}{a} < 1 \quad \text{e} \quad \sqrt{\frac{a}{b}} < 1,$$

temos

$$x' > \frac{d}{2} \quad \text{e} \quad x' < d, \qquad (1)$$

e, pelo mesmo motivo para a segunda raiz,

$$x'' > d. \qquad (2)$$

Examinando as desigualdades (1) e (2), chega-se a que um dos pontos está situado entre os focos A e B, mais próximo de B que de A, e o outro à direita de B, sôbre o suporte do segmento AB.

Aliás, as conclusões a que nos conduziu a discussão das fórmulas estão em perfeita harmonia com a natureza concreta do problema.

Realmente, como a Física estabelece, os raios luminosos emitidos pelas fontes, divergindo para tôdas as direções, percorrem a reta definida por AB em dois sentidos, a partir das origens A e B.

Os raios emanados em sentidos opostos, isto é, à direita de A e à esquerda de B, determinam, sôbre o segmento AB, certo ponto igualmente iluminado pelas fontes, ponto êsse que deve estar mais próximo de B que de A, pois a intensidade da fonte A é maior que a da fonte B.

Considerando, agora, os raios de mesmo sentido, à direita de A e B, é bem de ver que, sendo a intensidade da primeira fonte maior que a da segunda, haverá um ponto situado à direita de B, no percurso dos raios, que recebe de ambas a mesma quantidade de luz.

II. Para $a=b$, temos

$$\frac{b}{a}=1 \quad \text{e} \quad \sqrt{\frac{b}{a}}=1.$$

Introduzindo essa condição particular nas fórmulas resolutivas do problema, encontramos

$$x'=\frac{d}{2} \quad \text{e} \quad x''=\frac{d}{0},$$

resultado que conduz à conclusão de que existe apenas um ponto, situado no centro do segmento AB, em condições de satisfazer o problema, pois a segunda raiz não convém ao caso.

Ademais, cumpre notar que essas conclusões estão de acôrdo com a natureza concreta do problema.

III. Admitindo a hipótese de que $a<b$, a fração $\frac{b}{a}$ será imprópria. — Portanto:

$$\sqrt{\frac{b}{a}}>1.$$

Isto pôsto, resulta para um dos denominadores das fórmulas valor positivo e para o outro valor negativo.

Sendo positivos os numeradores e tendo os denominadores sinais diferentes, as raízes x' e x'' são *reais, desiguais* e de *sinais contrários*.

Essa diversidade de valores evidencia as duas soluções distintas para o problema, mostrando que há dois pontos em condições de satisfazê-lo, indicando a oposição de sinal sua situação oposta em relação ao foco A.

A primeira está compreendida entre os valores

$$0 \text{ e } \frac{d}{2}.$$

Êsse ponto, portanto, está situado entre os focos A e B, mais próximo de A que de B.

A segunda raiz, cujo valor absoluto é maior que d, fornece à esquerda de A, por ser negativa, a posição do segundo ponto.

Êsses resultados obtidos pela discussão das fórmulas, pelas considerações anteriores, são plenamente aceitáveis empìricamente.

145. EXERCÍCIOS.

1. Qual o número cujo produto da metade pela têrça parte é 150? R. ± 30.
2. Procurar dois números inteiros consecutivos cujo produto seja 240. R. 15 e 16 ou -16 e -15.
3. Procurar dois números ímpares consecutivos cujo produto seja 323. R. 17 e 19 ou -19 e -17.
4. Determinar um número positivo tal que o seu quadrado o exceda de 56. R. 8.
5. A soma de certo número com o seu quadrado é 132. Procurar êsse número. R. 11 ou -12.
6. Sabendo-se que certo número excede outro de 5 e que o produto de ambos é 176, determinar êsses números. R. ± 11 e ± 16.
7. Determinar dois números inteiros consecutivos cuja soma dos seus quadrados seja 265. R. ± 11 e ± 12.
8. Determinar dois números pares consecutivos cuja soma dos seus quadrados seja 164. R. ± 8 e ± 10.
9. Quais os múltiplos consecutivos de 5 cujo produto é 500? R. 20 e 25 ou -25 e -20.
10. Quais os múltiplos consecutivos de 7 cujo produto é 1470? R. 35 e 42 ou -42 e -35.
11. A diferença entre dois números é 5 e a soma dos seus quadrados é 193. Quais são? R. ± 12 e ± 7.

12. A soma de certo número com o seu inverso é $\frac{61}{30}$. Qual é o número?

R. $\frac{5}{6}$ ou $\frac{6}{5}$.

13. A diferença entre certo número e o seu inverso é $\frac{15}{56}$. Qual é o número?

R. $\frac{8}{7}$ ou $-\frac{7}{8}$.

14. Procurar dois números taís cuja soma seja 60 e cujo produto seja 864. R. 36 e 24.

15. Procurar dois números sabendo que a sua soma é 2 e que o seu produto é -15. R. -3 e $+5$.

16. Procurar dois números cuja soma seja $\frac{17}{12}$ e cujo produto seja $\frac{1}{2}$.

R. $\frac{3}{4}$ e $\frac{2}{3}$.

17. Calcular as dimensões de um retângulo cujo perímetro mede 40 m e cuja área mede 75 m². R. 15 m e 5 m.

18. Determinar as dimensões de um retângulo, sabendo-se que a sua área é 192 m² e que a base excede a altura de 4 m. R. 16 m e 12 m.

19. Determinar as dimensões de um retângulo cuja área mede 1 200 m², sabendo-se que a sua base equivale aos $\frac{4}{3}$ da altura.

R. 40 m e 30 m.

20. Calcular a base e a altura de um triângulo, sabendo que a primeira excede a segunda de 5 m e que a área do triângulo é 42 m². R. 12 m e 7 m.

21. Dois automóveis partem no mesmo instante em direção a um ponto situado à distância de 144 km; o primeiro, que percorre por hora 2 km mais que o segundo, chega ao seu destino 1 hora antes que o segundo. Qual é a velocidade de cada um? R. 18 km/h e 16 km/h.

22. Um automóvel, animado de velocidade uniforme, percorre, em certo tempo, 240 km; entretanto, se a sua velocidade fôsse diminuída de 20 km horários, o tempo necessário para igual percurso seria acrescido de uma hora. Qual era a velocidade? R. 80 km/h.

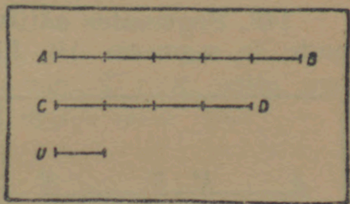
23. Dispõe-se da importância de 60 cruzeiros para ser distribuída em partes iguais a várias pessoas. Pergunta-se quantas são, sabendo que, se houvesse duas mais, cada parte diminuiria de um cruzeiro. R. 10.

24. A importância de 120 cruzeiros deveria ser distribuída em partes iguais entre várias pessoas. Entretanto, dez destas desistiram das suas partes em benefício das restantes, o que motivou o aumento de dois cruzeiros à parte que caberia a cada uma. Quantas eram as pessoas, antes da partilha? R. 30.

Capítulo VIII

LINHAS PROPORCIONAIS

146. Razão de dois segmentos. — Recordemos que a razão de duas grandezas da mesma espécie é o quociente da divisão dos números que exprimem suas respectivas medidas, relativamente a uma mesma unidade (1).



Assim, dados os segmentos AB e CD, figura ao lado, se tivermos

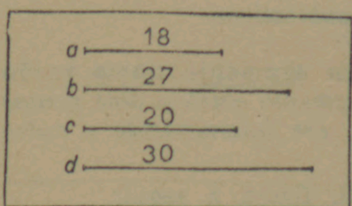
$$AB = 5u$$
$$CD = 4u,$$

sendo u a unidade adotada, dizemos que

$$\frac{AB}{CD} = \frac{5}{4}.$$

A razão de dois segmentos é a razão dos números que exprimem as suas respectivas medidas, referidas à mesma unidade.

147. Segmentos proporcionais. — Quatro segmentos, dados em certa ordem, dizem-se *proporcionais*, quando a razão dos dois primeiros é igual à razão dos dois últimos.



Consideremos, por exemplo, os segmentos traçados na figura ao lado, cujas medidas, referidas à mesma unidade, são

$$a = 18, \quad b = 27,$$
$$c = 20, \quad d = 30.$$

(1) Curso de Matemática, 2.ª série, n. 138.

Formando a razão dos dois primeiros e a dos dois últimos, vem

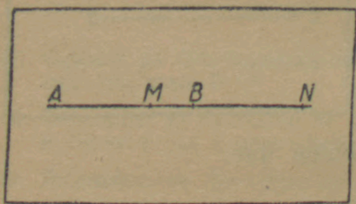
$$\frac{a}{b}=\frac{18}{27}=\frac{2}{3},$$

$$\frac{c}{d}=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}.$$

Como essas razões são iguais, dizemos que os segmentos considerados são proporcionais e escrevemos

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

148. **Segmentos aditivos e subtrativos.** — Sôbre o suporte do segmento AB, figura ao lado, consideremos dois pontos, M e N, o primeiro situado entre os pontos A e B e o segundo no prolongamento de AB.



Diz-se que o ponto M, pertencente a AB, divide *internamente* o segmento AB, e que o ponto N, tomado sôbre o prolongamento de AB, *divide externamente* o segmento AB.

Nos dois casos considerados, temos

$$MA + MB = AB$$
$$NA - NB = AB.$$

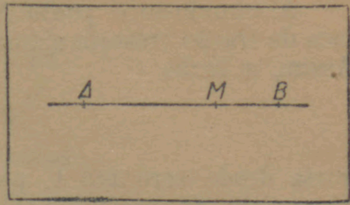
Os segmentos MA e MB denominam-se *aditivos;* os segmentos NA e NB denominam-se *subtrativos.*

149. **Pontos que dividem um segmento numa razão dada.** — *Sôbre o suporte de um segmento existem dois pontos que o dividem numa razão dada, um internamente e outro externamente.*

Consideremos o segmento AB, figura a seguir.

I. Primeiramente, demonstraremos que, entre A e B, existe um único ponto, M, que divide AB numa razão dada,

$$\frac{a}{b}.$$



Quando o ponto M coincide com o ponto A, temos $MA = 0$, e conseqüentemente

$$\frac{MA}{MB} = 0.$$

No deslocamento do ponto M desde A até B, o segmento MA cresce de zero a AB e o segmento MB decresce de AB a zero.

Nesse deslocamento, portanto, a razão

$$\frac{MA}{MB}$$

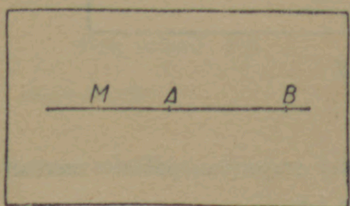
cresce indefinidamente, a partir de zero. E' claro, então, que o seu valor, a princípio menor e depois maior que

$$\frac{a}{b},$$

passa necessàriamente, e numa só posição do ponto M, por êsse valor. — Logo:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{a}{b}.$$

II. Demonstraremos, agora, que existe um único ponto no prolongamento de AB que o divide numa razão dada.



Nesse caso, o ponto M poderá estar situado à esquerda de A ou à direita de B.

Admitamos a primeira hipótese, segundo a qual

$$\frac{MA}{MB} < 1.$$

Já vimos que, quando os pontos M e A coincidem,

$$\frac{MA}{MB} = 0.$$

Afastando-se o ponto M para a esquerda de A, os têrmos de fração crescem simultâneamente de quantidades iguais. Assim, a razão

$$\frac{MA}{MB},$$

varia desde zero até 1, passando necessàriamente, e numa só posição do ponto M, pelo valor

$$\frac{a}{b},$$

em que $a<b$. — Logo:

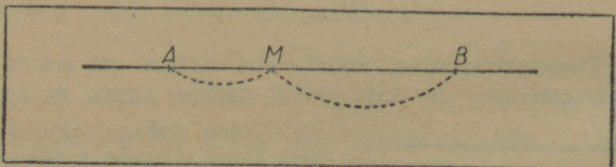
$$\frac{MA}{MB}=\frac{a}{b}.$$

Anàlogamente, demonstrar-se-ia a segunda parte da proposição, considerando o ponto M à direita de B, caso em que

$$\frac{MA}{MB}>1.$$

150. **Exercícios.** — 1.º *Determinar o ponto que divide internamente um segmento de 14 unidades na razão* $\frac{2}{5}$.

Seja AB o segmento dado e M o ponto procurado, figura abaixo.



Devemos ter

$$\frac{MA}{MB}=\frac{2}{5}.$$

Conforme a conhecida propriedade das proporções, podemos escrever

$$\frac{MA+MB}{MA}=\frac{2+5}{2}.$$

Mas, notando que

$$MA+MB=14,$$

segue-se que

$$\frac{14}{MA}=\frac{7}{2},$$

de onde se deduz

$$MA = 4.$$

Por outro lado, temos

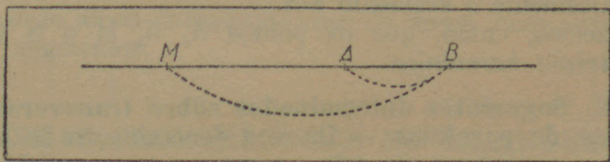
$$MB = AB - MA$$
$$MB = 14 - 4$$
$$MB = 10.$$

O ponto M satisfaz, portanto, à condição

$$\frac{MA}{MB} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

2.º *Determinar o ponto que divide externamente um segmento de 21 unidades na razão* $\frac{2}{5}$.

Como o ponto divide externamente o segmento e a razão dada é menor do que a unidade, devemos procurá-lo sôbre o suporte de AB, à esquerda de A.



Devemos ter

$$\frac{MA}{MB} = \frac{2}{5}.$$

Invertendo a proporção, vem

$$\frac{MB}{MA} = \frac{5}{2},$$

ou, de acôrdo com a conhecida propriedade,

$$\frac{MB - MA}{MA} = \frac{5 - 2}{2}.$$

Mas, notando que

$$MB - MA = 21,$$

segue-se que

$$\frac{21}{MA} = \frac{3}{2},$$

de onde se deduz

$$MA = 14.$$

Tomando, a partir de A e para a *esquerda*, 14 unidades, determina-se a posição do ponto procurado, M.

Com efeito, temos

$$\frac{MA}{MB} = \frac{14}{35} = \frac{2}{5}.$$

151. Divisão harmônica. — Dizemos que dois pontos, M e N, *dividem harmônicamente* um segmento, AB, quando o dividem interna e externamente na mesma razão:

$$\frac{MA}{MB}=\frac{NA}{NB}. \qquad (1)$$

Os pontos M e N, que dividem harmônicamente o segmento AB, denominam-se *conjugados harmônicos* em relação a A e B.

Por outro lado, alternando a proporção (1), vem

$$\frac{MA}{NA}=\frac{MB}{NB},$$

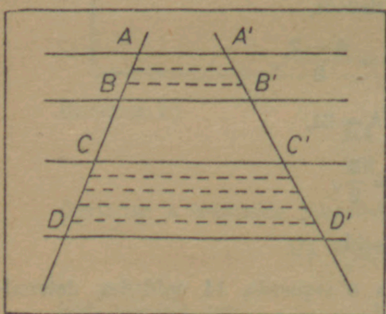
por onde se verifica que os pontos A e B também dividem harmônicamente o segmento MN.

Dizemos, então, que os pontos A, B, M e N formam uma *divisão harmônica*.

152. Segmentos determinados sôbre transversais por um feixe de paralelas. — Dá-se a denominação de *feixe de paralelas* ao sistema de três ou mais retas paralelas, e de *feixe de concorrentes* ao sistema de três ou mais retas que se cortam ao mesmo ponto.

Tôda reta que encontra as retas de um feixe denomina-se *secante* ou *transversal* dêsse feixe.

153. Teorema. — *Um feixe de paralelas intercepta, sôbre duas secantes quaisquer, segmentos proporcionais.*



Consideremos o feixe de paralelas AA′, BB′, CC′, DD′, interceptando as secantes AD e A′D′, figura ao lado.

Admitamos que uma unidade comum, u, esteja contida exatamente três vêzes no segmento AB e cinco vêzes no segmento CD. — Temos, então,

$$AB=3u \quad \text{e} \quad CD=5u,$$

e portanto,

$$\frac{AB}{CD}=\frac{3}{5}. \qquad (1)$$

Pelos pontos de divisão dos segmentos AB e CD, tracemos paralelas às retas do feixe. Estas dividirão o segmento A'B' em 3 partes iguais e o segmento C'D' em 5 partes iguais. — Assim:

$$A'B' = 3u \quad \text{e} \quad C'D' = 5u,$$

e portanto,

$$\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{3}{5}. \qquad (2)$$

Comparando as igualdades (1) e (2), temos

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}.$$

Na demonstração, admitimos que os segmentos AB e CD são comensuráveis. Do mesmo modo, demonstra-se que a proposição ainda subsiste no caso de serem incomensuráveis aquêles segmentos.

LINHAS PROPORCIONAIS NO TRIÂNGULO

154. **Teorema.** — *Tôda paralela a um dos lados de um triângulo divide os outros dois lados em segmentos proporcionais.*

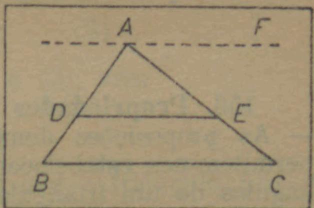
Consideremos o triângulo ABC, figura abaixo.

Hipótese:

$$DE \parallel BC.$$

Tese:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}.$$



Demonstração. Pelo vértice A do triângulo, conduzamos AF paralela a BC.

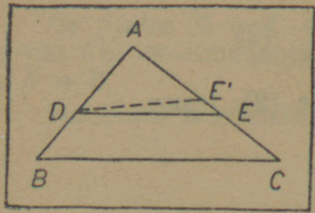
As retas BC, DE e AF constituem, assim, um feixe de paralelas, o qual intercepta as secantes AB e AC.

De acôrdo com a proposição anterior, temos, portanto:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}.$$

155. Teorema recíproco. — *Tôda reta que divide dois lados de um triângulo em segmentos proporcionais é paralela ao terceiro lado.*

Seja DE uma reta que passa pelos pontos, D e E, tomados respectivamente sôbre os lados AB e AC do triângulo ABC.



Hipótese:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}.$$

Tese:

$$DE \parallel BC.$$

Demonstração. Suponhamos que DE não seja paralela a BC. Nesse caso, pelo ponto D, poderíamos traçar $DE' \parallel BC$.

Pelo teorema direto, teríamos, então,

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE'}{E'C}.$$

Comparando essa igualdade com a estabelecida na hipótese, verifica-se que exprime um absurdo, pois, no segmento AC, só existe um ponto que o divide numa razão dada (n. 149).

Conseqüentemente, os pontos E e E′ coincidem, e temos

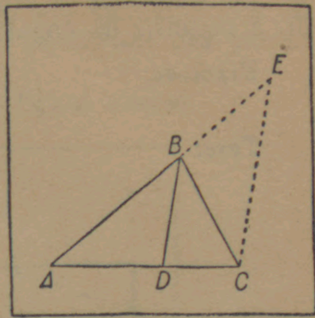
$$DE \parallel BC.$$

156. Propriedades das bissetrizes de um triângulo. — As proposições demonstradas nos parágrafos anteriores permitem-nos estabelecer as propriedades das bissetrizes dos ângulos de um triângulo.

E' o que fazemos a seguir, considerando no primeiro teorema a bissetriz de qualquer ângulo interno, e no segundo a de qualquer ângulo externo.

157. Teorema. — *A bissetriz de qualquer ângulo de um triângulo divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos lados que formam êsse ângulo.*

Consideremos o triângulo ABC, no qual BD é a bissetriz do ângulo B.



Hipótese:

$$\widehat{ABD} = \widehat{DBC}.$$

Tese:

$$\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC}.$$

Demonstração. Pelo ponto C, tracemos CE paralela a BD e prolonguemos o lado AB do triângulo. Essas retas concorrem em certo ponto, E.

No triângulo AEC, assim formado, temos

$$\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BE}. \qquad (1)$$

Por outro lado, no triângulo BEC,

$$\widehat{BEC} = \widehat{ABD}$$
$$\widehat{BCE} = \widehat{DBC}, \qquad (2)$$

os primeiros como ângulos correspondentes e os últimos como ângulos alternos internos das paralelas EC e BD cortadas pelas transversais AE e BC.

Além disso, em virtude da hipótese,

$$\widehat{ABD} = \widehat{DBC}. \qquad (3)$$

Comparando as igualdades (2) e (3), vem

$$\widehat{BEC} = \widehat{BCE},$$

igualdade que nos permite concluir que o triângulo BEC é isósceles. — Assim:

$$BC = BE.$$

Substituindo em (1) BE por BC, chega-se a que

$$\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC}.$$

158. **Teorema.** — *A bissetriz de qualquer ângulo externo de um triângulo divide o lado oposto em segmentos subtrativos proporcionais aos outros dois lados.*

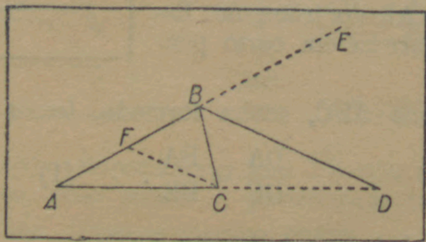
Consideremos o triângulo ABC, figura abaixo, e seja BD a bissetriz do ângulo externo CBE.

Hipótese:

$$C\hat{B}D = D\hat{B}E.$$

Tese:

$$\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC}.$$



Demonstração. Pelo vértice C, tracemos CF ∥ DB. No triângulo ABD, temos

$$\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BF}. \qquad (1)$$

Mas, tendo em vista que

$$B\hat{C}F = C\hat{B}D$$

$$D\hat{B}E = C\hat{F}B,$$

e que, por hipótese,

$$C\hat{B}D = D\hat{B}E,$$

segue-se, comparando essas igualdades, que

$$B\hat{C}F = B\hat{F}C.$$

É, pois, isósceles o triângulo FBC. — Logo:

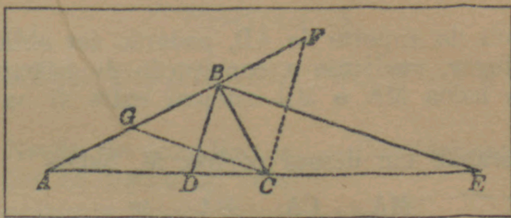
$$BC = BF.$$

Substituindo, na igualdade (1), BF por BC, vem

$$\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC}.$$

159. **Corolário.** — *Cada lado de um triângulo fica dividido harmônicamente pelos pés das bissetrizes que partem do vértice oposto.*

Consideremos o triângulo ABC, figura abaixo.



Sejam BD e BE as bissetrizes dos ângulos ABC e CBF.

Traçando CF paralela a BD e CG paralela a EB, temos, de acôrdo com os teoremas que vimos de demonstrar,

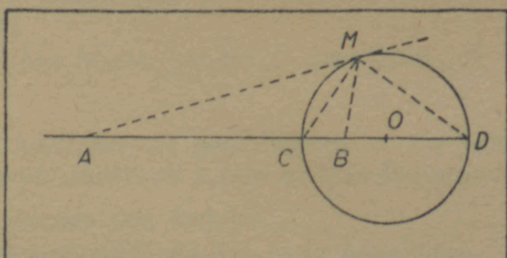
$$\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC} \quad \text{e} \quad \frac{EA}{EC} = \frac{BA}{BC}.$$

Mas, como essas proporções têm uma razão comum, segue-se que

$$\frac{DA}{DC} = \frac{EA}{EC}.$$

160. **Observação.** — Em se tratando de triângulo isósceles, a bissetriz do ângulo externo oposto à base é paralela a esta, motivo pelo qual não a corta.

161. **Lugar geométrico dos pontos, cuja razão das distâncias a dois pontos fixos é constante.** — Consideremos os pontos A e B, figura abaixo, e seja $\frac{m}{n}$ a razão dada.



Como sabemos, sôbre o suporte do segmento AB existem dois pontos que pertencem ao lugar. São êles os pontos C e D, tais que

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} = \frac{m}{n}.$$

Mas, fora do suporte de AB, poderão ser obtidos outros pontos do lugar, mediante a construção de triângulos como MAB, cujos lados MA e MB estejam entre si na razão de m para n.

Considerando um dêsses pontos, M, temos

$$\frac{MA}{MB} = \frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} = \frac{m}{n}.$$

Essas relações indicam que MC é a bissetriz interna e MD a externa do triângulo AMB no vértice M.

E, como as bissetrizes de dois ângulos adjacentes suplementares são perpendiculares, segue-se que

$$C\hat{M}D = 1r.$$

Conseqüentemente, o ponto M pertence à circunferência cujo diâmetro é CD.

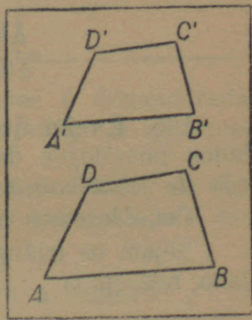
Por outro lado, demonstra-se que qualquer ponto da circunferência pertence ao lugar. — Logo:

O lugar geométrico dos pontos do plano, cuja razão das distâncias a dois pontos fixos dêsse plano é constante, é uma circunferência.

Capítulo IX

SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS E DE POLÍGONOS

162. **Noção de semelhança.** — Consideremos os polígonos traçados na figura ao lado.



Evidentemente, êsses polígonos não são iguais; entretanto, apresentam alguma coisa de comum: a forma.

Dizemos, por êsse motivo, que ABCD e A′B′C′D′ são figuras semelhantes.

Em geral, duas figuras dizem-se semelhantes quando têm a mesma forma e dimensões diferentes.

Como exemplos de figuras geométricas semelhantes podemos citar os seguintes: dois círculos, dois triângulos eqüiláteros, dois quadrados, etc.

163. **Definições.** — Dois polígonos dizem-se *semelhantes* quando têm os ângulos respectivamente iguais e os lados a êstes adjacentes respectivamente proporcionais.

Os elementos dos polígonos semelhantes recebem as denominações seguintes:

ângulos homólogos, os ângulos respectivamente iguais;

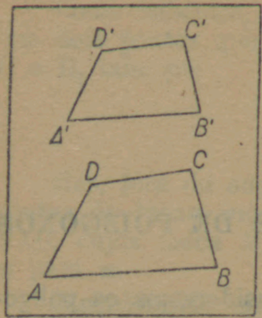
vértices homólogos, os vértices que pertencem a ângulos homólogos;

lados homólogos, os lados que ligam os vértices homólogos.

164. **Condições de semelhança.** — Os polígonos semelhantes devem satisfazer a dois grupos distintos de condições:

a) igualdade dos ângulos;

b) proporcionalidade dos lados homólogos.



Assim, para que os polígonos ABCD e A'B'C'D' sejam semelhantes, devemos ter

$$\hat{A} = \hat{A}'$$

$$\hat{B} = \hat{B}'$$

$$\hat{C} = \hat{C}'$$

$$\hat{D} = \hat{D}',$$

como também

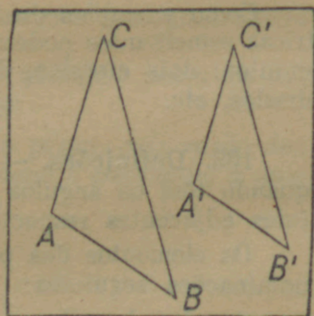
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DA}{D'A}.$$

165. **Razão de semelhança.** — A razão constante dos lados homólogos de polígonos semelhantes denomina-se *razão de semelhança.*

Consideremos um exemplo.

Sejam os triângulos semelhantes ABC e A'B'C', figura ao lado, nos quais

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}.$$



Medindo os lados dêsses triângulos, encontramos

$AB = 20\,mm$ $A'B' = 15\,mm$

$BC = 24\,mm$ $B'C' = 18\,mm$

$CA = 36\,mm$ $C'A' = 27\,mm.$

Substituindo, nas razões acima, os segmentos pelas respectivas medidas, vem

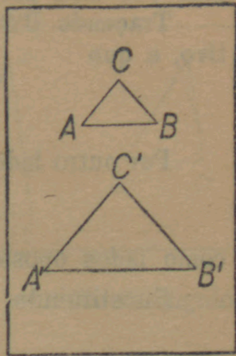
$$\frac{20}{15} = \frac{24}{18} = \frac{36}{27} = \frac{4}{3}.$$

Dizemos, então, que 4/3 é a razão de semelhança dos triângulos ABC e A'B'C'.

166. **Triângulos semelhantes.** — Conforme a definição de polígonos semelhantes, dois triângulos dizem-se *semelhan-*

tes quando têm os ângulos respectivamente iguais e os lados homólogos proporcionais.

Assim, para que os triângulos ABC e A'B'C' sejam semelhantes, deve-se ter



$$\hat{A} = \hat{A}'$$

$$\hat{B} = \hat{B}'$$

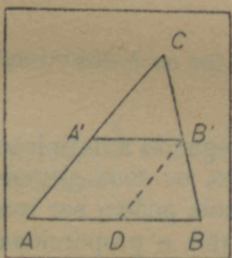
$$\hat{C} = \hat{C}'$$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}.$$

A existência de triângulos semelhantes é demonstrada pela proposição de que nos ocupamos no parágrafo seguinte.

167. **Teorema.** — *Tôda paralela a um dos lados de um triângulo forma com os outros dois lados um triângulo semelhante ao primeiro.*

Consideremos o triângulo ABC, figura a seguir.



Hipótese:

$$A'B' \parallel AB.$$

Tese:

$$\Delta\, A'B'C \backsim \Delta\, ABC.$$

Demonstração. Nos triângulos ABC e A'B'C, temos

$$\hat{C} = \hat{C},$$

como ângulo comum,

$$\hat{A} = \hat{A}', \quad \hat{B} = \hat{B}',$$

como ângulos correspondentes de paralelas cortadas por transversal.

Demonstrada, assim, a igualdade dos ângulos, resta-nos provar a proporcionalidade dos lados.

Temos $$\frac{AC}{A'C} = \frac{BC}{B'C}, \qquad (1)$$

como segmentos determinados sôbre dois lados de um triângulo por uma paralela ao terceiro lado (n. 154).

Traçando B'D paralela a CA, chega-se, pelo mesmo motivo, a que

$$\frac{BC}{B'C} = \frac{AB}{AD}. \qquad (2)$$

Por outro lado, notemos que

$$AD = A'B', \qquad (3)$$

como lados opostos do paralelogramo ADB'A'.

Substituindo AD por A'B' na igualdade (2), vem

$$\frac{BC}{B'C} = \frac{AB}{A'B'}. \qquad (4)$$

Finalmente, comparando as igualdades (1) e (4), concluímos que

$$\frac{AC}{A'C} = \frac{BC}{B'C} = \frac{AB}{A'B'}.$$

Observação. — Do teorema que acabamos de demonstrar decorre uma conseqüência notável — *a lei linear de Tales*, cujo enunciado é o seguinte:

Dois triângulos eqüiângulos entre si têm os lados homólogos proporcionais.

168. **Semelhança de triângulos.** — Segundo a definição, para que dois triângulos sejam semelhantes, os seus elementos devem satisfazer cinco condições, as quais podem ser reunidas em dois grupos: igualdade dos ângulos e proporcionalidade dos lados homólogos.

Entretanto, essas condições não são independentes entre si, de modo que a verificação de duas delas, convenientemente escolhidas, acarreta a das restantes.

As proposições que estabelecem as condições *suficientes* para a semelhança de dois triângulos constituem os três *casos de semelhança* de triângulos de que nos ocupamos a seguir.

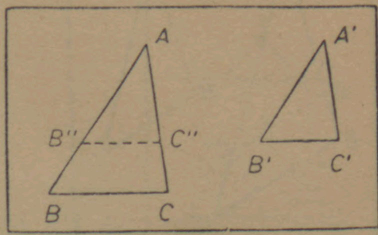
169. **1.º caso.** — *Dois triângulos que têm dois ângulos respectivamente iguais são semelhantes.*

Sejam os triângulos ABC e A'B'C', figura abaixo.

Hipótese:

$$\hat{A} = \hat{A}'$$

$$\hat{B} = \hat{B}'.$$



Tese:

$$\Delta\, A'B'C' \sim \Delta\, ABC.$$

Demonstração. Sôbre o lado AB do primeiro triângulo, tomemos o segmento

$$AB'' = A'B'.$$

Depois, pelo ponto B'', tracemos o segmento B''C'' paralelo a BC.

Forma-se, dêsse modo, o triângulo AB''C'', o qual, de acôrdo com a proposição estabelecida no parágrafo 167, é semelhante ao triângulo ABC.

Mas, nos triângulos AB''C'' e A'B'C', temos

$$\hat{A} = \hat{A}',$$

por hipótese, e

$$\hat{B}'' = \hat{B}'$$

porque $\hat{B}'' = \hat{B}$, como ângulos correspondentes, e $\hat{B} = \hat{B}'$, por hipótese;

$$AB'' = AB',$$

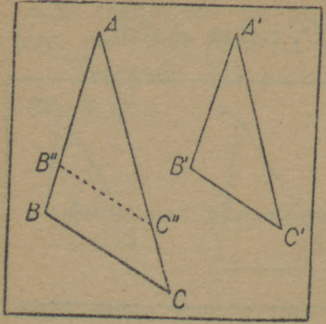
por construção. — Conseqüentemente:

$$\Delta\, AB''C'' = \Delta\, A'B'C'.$$

Sendo o primeiro dêsses triângulos semelhante ao triângulo ABC, segue-se que o segundo também o será.

170. **2.º caso.** — *Dois triângulos que têm um ângulo igual formado por lados proporcionais são semelhantes.*

Consideremos os triângulos ABC e A'B'C', figura a seguir.



Hipótese:

$$\hat{A} = \hat{A}'$$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}.$$

Tese:

$$\Delta\, A'B'C' \backsim \Delta\, ABC.$$

Demonstração. Sôbre o lado AB do primeiro triângulo, tomemos o segmento

$$AB'' = A'B'.$$

Depois, tracemos o segmento B″C″ paralelo a BC. Forma-se, assim, o triângulo AB″C″, que é semelhante ao triângulo ABC.

Para demonstrar a proposição, basta, pois, provar que os triângulos AB″C″ e A′B′C′ são iguais.

Nos triângulos AB″C″ e ABC, temos

$$\frac{AB}{AB''} = \frac{AC}{AC''}. \qquad (1)$$

Notando que, por construção,

$$AB'' = A'B',$$

vem, fazendo a substituição em (1),

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{AC''}. \qquad (2)$$

Comparando essa igualdade com a igualdade admitida na hipótese, podemos escrever

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{AC}{AC''},$$

de onde se deduz

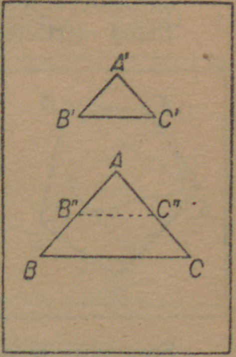
$$A'C' = AC''.$$

São, pois, iguais os triângulos AB″C″ e A′B′C′, de vez que têm dois lados iguais e iguais os ângulos por êles formados. — Logo:

$$\Delta\, A'B'C' \backsim \Delta\, ABC.$$

171. 3.º caso. — *Dois triângulos que têm os lados proporcionais são semelhantes.*

Sejam os triângulos ABC e A'B'C', figura ao lado.



Hipótese:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}.$$

Tese:

$$\Delta\, A'B'C' \backsim \Delta\, ABC.$$

Demonstração. Sôbre o lado AB do triângulo ABC, tomemos o segmento

$$AB'' = A'B'$$

e depois tracemos o segmento B''C'' paralelo a BC.

Pela semelhança dos triângulos ABC e AB''C'', temos

$$\frac{AB}{AB''} = \frac{AC}{AC''} = \frac{BC}{B''C''}.$$

Mas, notando que $AB'' = A'B'$, vem

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{AC''} = \frac{BC}{B''C''}.$$

Comparando essas relações com as admitidas na hipótese, chega-se a que

$$\frac{AC}{AC''} = \frac{AC}{A'C'} \quad \text{e} \quad \frac{BC}{B''C''} = \frac{BC}{B'C'},$$

de onde se deduz

$$AC'' = A'C' \quad \text{e} \quad B''C'' = B'C'.$$

Ora, tendo os três lados respectivamente iguais, os triângulos AB''C'' e A'B'C' são iguais. — Portanto:

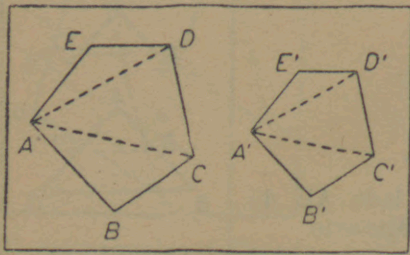
$$\Delta\, A'B'C' \backsim \Delta\, ABC.$$

172. **Semelhança de polígonos.** — Conforme a definição, dois polígonos são semelhantes quando têm os ângulos respectivamente iguais e os lados homólogos proporcionais.

A semelhança de polígonos funda-se na proposição que demonstramos a seguir e na sua recíproca.

173. **Teorema.** — *Dois polígonos semelhantes podem ser decompostos no mesmo número de triângulos também semelhantes e que entre si guardam conformidade de disposição.*

Consideremos os polígonos semelhantes ABCD e A'B'C'D'. Pelos vértices homólogos A e A', tracemos diagonais aos dois polígonos, decompondo-os, assim, em triângulos.



De acôrdo com a hipótese, nos triângulos ABC e A'B'C',

$$\hat{B} = \hat{B}';$$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}.$$

São, pois semelhantes êsses triângulos, e temos

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}. \qquad (1)$$

Além disso, por hipótese,

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'}. \qquad (2)$$

Comparando as igualdades (1) e (2), podemos escrever

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{CD}{C'D'}. \qquad (3)$$

Por outro lado, ainda em virtude da hipótese,

$$\hat{C} = \hat{C}';$$

e por serem semelhantes os triângulos ABC e A'B'C',

$$B\hat{C}A = B'\hat{C}'A'.$$

Subtraindo, ordenadamente, as duas últimas igualdades, encontramos

$$\hat{C} - B\hat{C}A = \hat{C}' - B'\hat{C}'A'$$

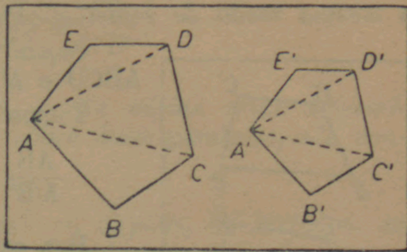
$$A\hat{C}D = A'\hat{C}'D'. \qquad (4)$$

As igualdades (3) e (4) permitem-nos concluir a semelhança dos triângulos e ACD e A'C'D'.

Por um procedimento análogo, demonstra-se a semelhança dos demais triângulos.

174. **Teorema recíproco.** — *Dois polígonos são semelhantes, quando se compõem do mesmo número de triângulos semelhantes, e dispostos da mesma maneira.*

Com efeito, admitindo que os polígonos ABCD e A'B'C'D' sejam constituídos do mesmo número de triângulos semelhantes e dispostos do mesmo modo, chega-se fàcilmente a que os ângulos do primeiro polígono são respectivamente iguais aos do segundo, uns como ângulos homólogos e outros como soma de ângulos homólogos de triângulos semelhantes. Portanto:



$$\hat{A} = \hat{A}'; \quad \hat{B} = \hat{B}'; \quad \hat{C} = \hat{C}'; \quad \hat{D} = \hat{D}'.$$

Satisfeita a primeira condição para a semelhança dos polígonos considerados, estabeleçamos a segunda, referente à proporcionalidade dos lados.

Nos triângulos semelhantes ABC e A'B'C', temos

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} \qquad (1)$$

e, nos triângulos semelhantes ACD e A'C'D',

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{AD}{A'D'}. \qquad (2)$$

Além disso, os triângulos semelhantes ADE e A'D'E' dão-nos

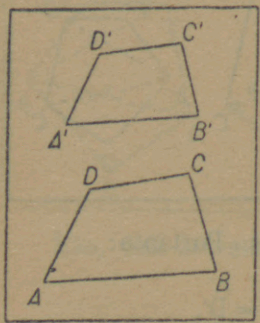
$$\frac{AD}{A'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'}. \qquad (3)$$

Comparando essa série de razões e suprimindo as comuns, podemos escrever

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'}.$$

175. **Observação.** — No capítulo XII, depois de convenientemente estudadas as propriedades dos polígonos regulares, estabelecemos a proposição atinente à semelhança dos polígonos regulares convexos (n. 239).

176. Propriedade dos polígonos semelhantes. — *Os perímetros de dois polígonos semelhantes guardam entre si a mesma razão de semelhança dêstes.*



Sejam os polígonos semelhantes ABCD e A'B'C'D', figura ao lado.

Temos

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DA}{D'A'}.$$

Por outro lado, de acôrdo com a conhecida propriedade das razões iguais, podemos escrever

$$\frac{AB + BC + CD + DA}{A'B' + B'C' + C'D' + D'A'} = \frac{AB}{A'B'}.$$

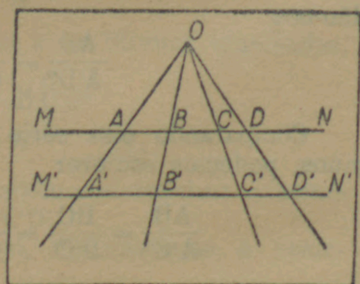
Designando por P o perímetro do primeiro polígono e por P' o do segundo, resulta

$$\frac{P}{P'} = \frac{AB}{A'B'}.$$

177. Feixe de concorrentes. — *Um feixe de retas concorrentes determina segmentos proporcionais sôbre paralelas, situadas no mesmo plano.*

No plano a que pertencem as retas paralelas MN e M'N', consideremos o feixe de concorrentes OA', OB', OC'. Sendo MN paralela a M'N', os triângulos OAB e OA'B' são semelhantes e temos

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{OB}{OB'}.$$



Pelo mesmo motivo, nos triângulos semelhantes OBC e OB'C', temos

$$\frac{OB}{OB'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{OC}{OC'},$$

e nos triângulos OCD e OC'D',

$$\frac{OC}{OC'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{OD}{OD'}.$$

Comparando as três séries de razões iguais, resulta

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'}.$$

178. **Teorema recíproco.** — *Se várias retas determinam segmentos proporcionais sôbre duas paralelas, são concorrentes.*

179. **Escalas.** — Em geral, os objetos, os terrenos, as casas, etc., são reproduzidos no desenho por meio de figuras semelhantes.

Assim, para representar um terreno de forma retangular, com 20 metros de frente e 90 de fundo, pode-se traçar um retângulo de 20 centímetros de base e 90 de altura.

Essas reproduções denominam-se *croquis, plantas, cartas,* etc., e a razão de semelhança entre o desenho e a figura representada, geralmente expressa em fração com o numerador igual à unidade, chama-se *escala.*

No exemplo, a escala adotada é a seguinte:

$$\frac{0{,}20}{20} = \frac{1}{100}.$$

Lê-se: escala de um por cem.

Os comprimentos medidos no modêlo denominam-se *distâncias naturais* e os segmentos homólogos no desenho chamam-se *distâncias gráficas.*

Conhecida a escala de um desenho, fácil é determinar a distância natural correspondente a uma distância gráfica dada, ou, inversamente, a distância gráfica que deve representar uma natural dada. — Exemplos:

I. Achar a distância natural que, numa planta na escala de $\frac{1}{50}$ é representada por um segmento de 24 cm.

Nessa escala, cada centímetro no desenho corresponde a 50 centímetros no modêlo.

Assim, designando por L a distância natural procurada, temos

$$L = 24\text{ cm} \times 50 = 1\,200\text{ cm},$$

$$L = 12\text{ m}.$$

II. Achar o segmento que, num desenho feito na escala de $\frac{1}{100}$, deve representar a distância de 80 m.

Nessa escala, as distâncias naturais são 100 vêzes maiores que as distâncias gráficas correspondentes.

Portanto, para obter o segmento procurado, l, basta dividir por 100 a distância dada:

$$l = 80\,\text{m} : 100 = 0{,}8\,\text{m}$$

$$l = 80\,\text{cm}.$$

180. **Exercícios resolvidos.** — 1.º *Em um triângulo ABC, são dados: $AB = 4\,m$, $BC = 5\,m$ e $CA = 6\,m$. Achar os lados do triângulo semelhante a êsse, cujo perímetro mede 11,25 m.*

Designando, respectivamente, por $2p$ o perímetro do primeiro triângulo e por $2p'$ o do segundo, temos

$$2p = 4 + 5 + 6$$

$$2p = 15\,\text{m}$$

$$2p' = 11{,}25\,\text{m}.$$

Como os perímetros de dois triângulos semelhantes estão entre si como dois lados homólogos quaisquer, temos

$$\frac{\text{AB}}{\text{A'B'}} = \frac{\text{BC}}{\text{B'C'}} = \frac{\text{CA}}{\text{C'A'}} = \frac{2p}{2p'},$$

ou, fazendo as substituições,

$$\frac{4}{\text{A'B'}} = \frac{5}{\text{B'C'}} = \frac{6}{\text{C'A'}} = \frac{15}{11{,}25}.$$

Dessa série de razões iguais, deduz-se, sucessivamente:

$$\text{A'B'} = \frac{4 \times 11{,}25}{15} = 3\,\text{m}$$

$$\text{B'C'} = \frac{5 \times 11{,}25}{15} = 3{,}75\,\text{m}$$

$$\text{C'A'} = \frac{6 \times 11{,}25}{15} = 4{,}5\,\text{m}.$$

2.º *São dados dois paralelogramos semelhantes; os lados consecutivos do primeiro medem 12 m e 9 m, respectivamente. Achar o perímetro do segundo, tendo em conta que a razão de semelhança entre ambos é $\frac{2}{3}$.*

Calculemos o perímetro do paralelogramo dado:

$$2p = 2 \times 12 + 2 \times 9$$
$$2p = 42 \text{ m.}$$

Designando por $2p'$ o perímetro procurado, temos, pois,

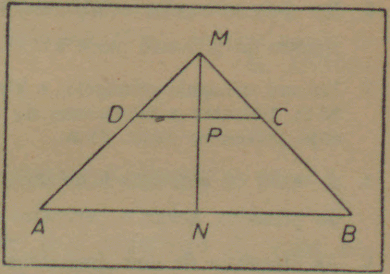
$$\frac{42}{2p'} = \frac{2}{3},$$

de onde deduzimos

$$2p' = 63 \text{ m.}$$

3.º *As bases de um trapézio medem 5 m e 2 m, respectivamente, e a altura mede 1,5 m. Calcular as alturas dos triângulos formados pelas bases do trapézio e os prolongamentos dos lados não paralelos.*

Seja ABCD o trapézio dado, figura ao lado.



Prolongando os lados BC e AD, formam-se os triângulos ABM e DCM, cujas alturas devemos calcular.

Notando que êsses triângulos são semelhantes, podemos escrever

$$\frac{MP}{MN} = \frac{DC}{AB}.$$

Por outro lado, como

$$MN = MP + PN$$
$$MN = MP + 1{,}5,$$

vem, feitas as substituições na proporção supra,

$$\frac{MP}{MP + 1{,}5} = \frac{2}{5},$$

de onde se deduz

$$5MP = 2MP + 3,$$
$$MP = 1 \text{ m.}$$

Por outro lado, temos

$$MN = 1 + 1{,}5,$$
$$MN = 2{,}5 \text{ m.}$$

181. **Exercícios propostos.**

1. Os lados de um triângulo medem respectivamente, 6 m, 8 m e 10 m. Calcular os lados de um triângulo semelhante a êsse, segundo a razão de 2 para 3. R. 9 m, 12 m e 15 m.

2. Calcular a razão de semelhança de dois triângulos, sabendo que um dos lados do primeiro mede 18 m e o seu homólogo no segundo tem 12 m. R. $\frac{3}{2}$.

3. Os lados de um quadrilátero medem, respectivamente 6 m, 9 m, 12 m e 15 m. Calcular os lados de um quadrilátero semelhante a êsse, sabendo que a razão de semelhança entre ambos é $\frac{3}{7}$.

R. 14 m, 21 m, 28 m e 35 m.

4. A razão de semelhança de dois polígonos é $\frac{5}{6}$. Medindo 9 m um dos lados do primeiro, calcular o comprimento do seu homólogo no segundo.

R. 10,8 m.

5. Dados dois triângulos semelhantes na razão de $\frac{4}{5}$, achar o perímetro do segundo, sabendo que os lados do primeiro medem, respectivamente, 3 m, 4 m e 5 m.

R. 15 m.

6. Em dois triângulos eqüiláteros, cuja razão de semelhança é $\frac{5}{4}$, o perímetro do primeiro mede 9 m. Calcular o lado do segundo. R. 2,4 m.

7. Em um triângulo retângulo, a hipotenusa mede 15 m e o perímetro tem 36 m. Calcular a hipotenusa do triângulo retângulo semelhante a êsse, cujo perímetro mede 24 m.

R. 10 m.

8. A razão de semelhança de dois quadrados é $\frac{7}{8}$. Medindo 14 m o lado do primeiro, achar o perímetro do segundo.

R. 64 m.

9. As diagonais de dois quadrados estão entre si na razão de 5 para 6. Medindo 14 m o perímetro do primeiro, calcular o lado do segundo.

R. 4,2 m.

10. A razão de semelhança de dois pentágonos é $\frac{3}{2}$. Medindo 30 m o perímetro do primeiro, achar o perímetro do segundo.

R. 20 m.

11. O perímetro de um polígono mede 36 m e um dos seus lados tem 7,5 m. Calcular o lado homólogo a êste em um polígono semelhante ao primeiro, cujo perímetro é de 90 m.

R. 18,75 m.

12. Dois retângulos são semelhantes, segundo a razão de 4 para 9. As dimensões do primeiro são 8 m e 5 m, respectivamente. Calcular o perímetro do segundo.

R. 58,5 m.

13. Os lados consecutivos de um paralelogramo medem, respectivamente, 10 m e 15 m. Achar o perímetro do paralelogramo semelhante a êsse, segundo a razão de 10 para 3.

R. 15 m.

14. No triângulo ABC, cujos lados são AB = 6,4 m, BC = 8,6 m e AC = = 10 m, unem-se os meios dos lados AB e AC. Calcular o perímetro do novo triângulo assim formado.

R. 12,5 m.

15. No triângulo ABC são dados: AB = 20 e AC = 15. Sôbre o lado AB, toma-se o segmento AD = 12. Pelo ponto D, tira-se uma paralela ao lado BC, a qual encontra AC no ponto E. Calcular o segmento EC.

R. 6.

16. As bases de um trapézio medem, respectivamente, 12 m e 8 m e a altura mede 5 m. Calcular as alturas dos triângulos que se obtêm prolongando os lados não paralelos do trapézio. R. 10 m e 15 m.

17. Prolongando os lados não paralelos de um trapézio, formam-se dois triângulos, cujas alturas são 2,5 e 6, respectivamente. Calcular a base menor dêsse trapézio, sabendo que a maior é 15. R. 6,25.

18. Na planta de uma casa, desenhada na escala de $\frac{1}{50}$, certo quarto é representado por um retângulo de 12 cm de comprimento e 9 cm de largura. Achar as dimensões naturais dêsse quarto. R. 6 m e 4,5 m.

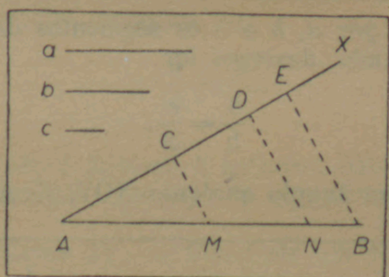
19. Calcular a distância entre Bagdá e Meca, sabendo que a distância gráfica entre essas cidades, numa carta feita na escala de 1/10 000 000, é de 14 cm. R. 1 400 km.

20. Em certa carta, a distância de 5 750 m, que separa o Colégio Militar do Arsenal de Marinha, é representada por 23 cm. Achar a escala da carta. R. 1/25 000.

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

182. **Problema I.** — *Dividir um segmento de reta em partes proporcionais a segmentos dados.*

Seja dividir o segmento AB em partes proporcionais aos segmentos *a*, *b* e *c*, figura abaixo.



Designando por x, y e z os segmentos procurados, devemos ter

$$x + y + z = \text{AB}$$

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$$

Pelo ponto A, conduzamos uma semi-reta qualquer AX. Sôbre AX, tomemos sucessivamente, a partir de A, os segmentos

$$AC = a$$
$$CD = b$$
$$DE = c.$$

Depois, liguemos os pontos E e B, e, pelos pontos C e D, tracemos paralelas a EB. Estas cortam o segmento AB nos pontos M e N, respectivamente.

Como várias retas paralelas interceptam, sôbre duas secantes, segmentos proporcionais, temos

$$\frac{AM}{AC} = \frac{MN}{CD} = \frac{NB}{DE}$$

$$\frac{AM}{a} = \frac{MN}{b} = \frac{NB}{c}.$$

Conseqüentemente

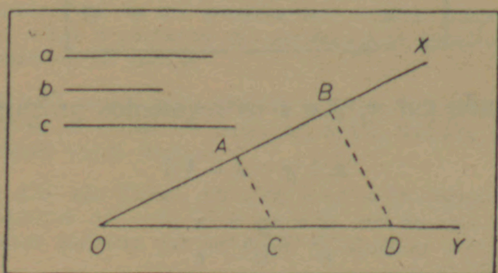
$$AM = x$$
$$MN = y$$
$$NB = z.$$

183. **Problema II.** — *Construir a quarta proporcional a três segmentos dados.*

Designando por a, b e c os segmentos dados e por x o segmento procurado, devemos ter

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}.$$

Tracemos um ângulo qualquer XOY, figura abaixo.



Sôbre o lado OX, tomemos, um em seguida ao outro, os segmentos

$$OA = a$$

$$AB = b,$$

e, sôbre o lado OY, o segmento

$$OC = c.$$

Liguemos os pontos A e C. Depois, pelo ponto B, tracemos BD paralelo a AC.

Obtemos, assim, o segmento CD, que é a quarta proporcional procurada.

Com efeito, considerando as paralelas AC e BD e as secantes OX e OY, temos, como no problema anterior,

$$\frac{OA}{AB} = \frac{OC}{CD},$$

isto é,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}.$$

184. **Problema III.** — *Construir a terceira proporcional a dois segmentos dados.*

Designando por a e b os segmentos dados e por x o segmento procurado, devemos ter

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{x}.$$

A construção é análoga à anterior, bastando, para resolver o problema, que se tomem os segmentos b e c iguais (1).

185. **Problema IV.** — *Construir um polígono semelhante a outro, segundo uma razão dada.*

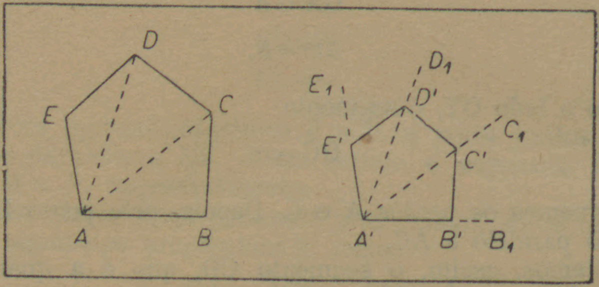
Seja ABCDE o polígono e

$$\frac{m}{n}$$

a razão dada, figura a seguir.

(1) Mais adiante, o 2.º e o 3.º problemas serão resolvidos de outro modo.

Fazendo vértice no ponto A′, tomado como homólogo de A, construamos os ângulos



$$C_1\widehat{A'}B_1 = C\widehat{A}B$$

$$D_1\widehat{A'}C_1 = D\widehat{A}C$$

$$E_1\widehat{A'}D_1 = E\widehat{A}D.$$

Sôbre os lados dos ângulos assim traçados, tomemos os segmentos A′B′, A′C′, A′D′, e A′E′, que estejam para AB, AC, AD e AE na razão de m para n. Obtemos dêsse modo, os pontos B′, C′, D′ e E′.

Ligando êsses pontos, forma-se o polígono procurado, A′B′C′D′E′.

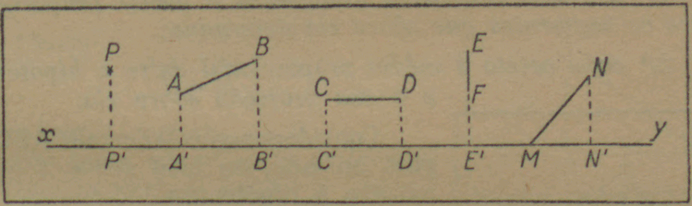
Com efeito, os polígonos ABCDE e A′B′C′D′E′ se compõem do mesmo número de triângulos semelhantes, segundo a razão de m para n e dispostos do mesmo modo.

Capítulo X

RELAÇÕES MÉTRICAS NOS TRIÂNGULOS

186. **Projeções.** — Dá-se a denominação de projeção ortogonal, ou simplesmente, *projeção* de um ponto sôbre uma reta ao pé da perpendicular baixada do ponto à reta.

Assim, P′ é a projeção do ponto P sôbre a reta XY, figura abaixo.



Projeção de um segmento retilíneo sôbre uma reta é a porção da reta compreendida entre as projeções dos extremos do segmento.

Exemplo: A′B′ é a projeção de AB sôbre XY.

A projeção sôbre uma reta de um segmento paralelo a essa reta é igual ao próprio segmento. E diz-se, nesse caso, que o segmento se projeta em verdadeira grandeza sôbre a reta. — Exemplo:

$$CD = C'D'.$$

Por outro lado, quando o segmento é perpendicular à reta, a sua projeção reduz-se a um ponto, e quando um dos extremos do segmento pertence à reta, a sua projeção é a parte da reta compreendida entre êsse ponto e a projeção do outro extremo.

Exemplo: MN′ é a projeção de MN sôbre XY.

187. Relações métricas no triângulo retângulo. — A seguir, demonstraremos as proposições que estabelecem as relações métricas no triângulo retângulo.

Antes disso, porém, devemos acentuar que um segmento é *média proporcional* entre dois outros, quando o número que exprime a sua medida é média proporcional entre os números que exprimem a medida dos outros dois.

Assim, designando respectivamente por a, b e c os números que medem três segmentos dados, e sendo b a média proporcional entre a e c, temos

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c},$$

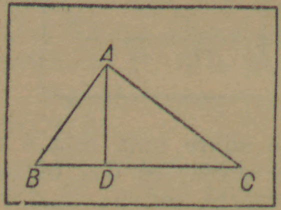
de onde se deduz

$$b^2 = ac.$$

188. Teorema. — *Em qualquer triângulo retângulo:*

1.º *a altura relativa à hipotenusa é média proporcional entre os segmentos que sôbre ela determina;*

2.º *cada cateto é média proporcional entre a hipotenusa e a sua projeção sôbre ela.*



Consideremos o triângulo ABC, figura ao lado, no qual AD é a altura relativa à hipotenusa.

Hipótese:

$$\hat{A} = R$$
$$AD \perp BC.$$

Tese:

$$\overline{AD}^2 = DB \, . \, DC$$
$$\overline{AB}^2 = BC \, . \, BD$$
$$\overline{AC}^2 = CB \, . \, CD$$

Demonstração. I. Nos triângulos retângulos ADB e ADC, temos

$$D\hat{B}A = 1r - B\hat{A}D$$
$$D\hat{A}C = 1r - B\hat{A}D.$$

Essas igualdades permitem-nos concluir que

$$\widehat{DBA} = \widehat{DAC}.$$

Por outro lado, sabemos que, quando dois triângulos retângulos têm um ângulo agudo igual são semelhantes. — Portanto:

$$\Delta ADB \backsim \Delta ADC.$$

Da semelhança dêsses triângulos, deduz-se

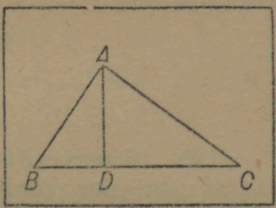
$$\frac{DB}{AD} = \frac{AD}{DC},$$

de onde tiramos

$$\overline{AD}^2 = DB \, . \, DC.$$

Fica, assim demonstrada a primeira parte da proposição.

II. Passemos à segunda parte, comparando, primeiramente, os triângulos retângulos BAC e BAD.



Temos

$$\hat{B} = \hat{B},$$

como ângulo comum.

São, pois, semelhantes os triângulos considerados. — Logo:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BD},$$

de onde se deduz

$$\overline{AB}^2 = BC \, . \, BD.$$

Comparando, depois, os triângulos BAC e ADC, chega-se, do mesmo modo, a que são semelhantes. — Assim:

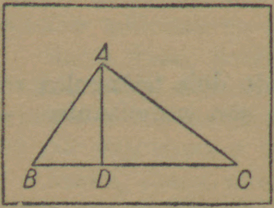
$$\frac{CB}{AC} = \frac{AC}{CD},$$

de onde tiramos

$$\overline{AC}^2 = CB \, . \, CD.$$

189. **Teorema.** — *Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.*

Consideremos o triângulo retângulo ABC, figura ao lado.



Traçando a altura, AD, relativa à hipotenusa, temos, de acôrdo com a proposição anterior,

$$\overline{AB}^2 = BC \,.\, BD$$

$$\overline{AC}^2 = BC \,.\, CD.$$

Somando ordenadamente essas igualdades, encontramos

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = BC \,.\, BD + BC \,.\, CD$$

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = BC\,(BD + CD).$$

Mas, notando que

$$BD + CD = BC,$$

segue-se que

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = BC \,.\, BC$$

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2.$$

190. **Observação.** — A proposição demonstrada no parágrafo anterior, conhecida pela denominação de teorema de Pitágoras, estabelece a relação entre os lados de um triângulo retângulo, a qual permite calcular um dêles quando são conhecidos os outros dois.

Com efeito, designando por a a hipotenusa e por b e c os catetos de um triângulo retângulo, temos

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

de onde se deduz

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

191. **Triângulos de Pitágoras.** — Os triângulos retângulos cujos lados podem ser expressos por números inteiros denominam-se *triângulos de Pitágoras*.

Exemplo: no triângulo retângulo

$$a = 25$$
$$b = 24$$
$$c = 7$$

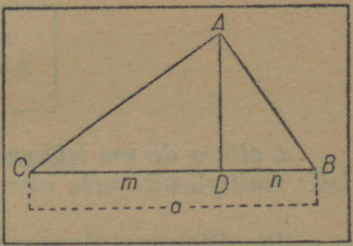
temos

$$25^2 = 24^2 + 7^2.$$

Entre os triângulos dessa natureza, o mais notável é aquêle no qual os lados têm por medida os números 3, 4 e 5, respectivamente:

$$5^2 = 3^2 + 4^2.$$

Por outro lado, notemos que, de acôrdo com o terceiro caso da semelhança, os triângulos cujos lados são proporcionais aos números 3, 4 e 5 são retângulos e semelhantes entre si.



192. **Fórmulas.** — Designando por a a hipotenusa, por b e c os catetos do triângulo retângulo ABC, por h a altura relativa à hipotenusa, por m e n as projeções dos catetos sôbre a hipotenusa, as propriedades estabelecidas nos parágrafos precedentes podem ser expressas pelas relações seguintes:

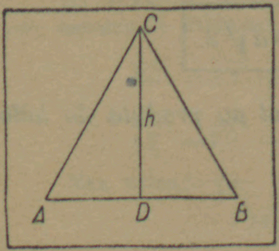
I. $h^2 = mn$

II. $b^2 = am, \quad c^2 = an$

III. $a^2 = b^2 + c^2.$

193. **Altura de um triângulo eqüilátero.** — Sejam, respectivamente, h a altura e a o lado do triângulo eqüilátero ABC, figura abaixo.

No triângulo retângulo CDB, temos



$$\overline{CB}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{DB}^2,$$

ou

$$\overline{CD}^2 = \overline{CB}^2 - \overline{DB}^2.$$

Mas, notando que

$$DB = \frac{a}{2},$$

segue-se que

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

ou, efetuando,

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{3a^2}{4}.$$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os membros da igualdade, vem

$$h = \sqrt{\frac{3a^2}{4}}$$

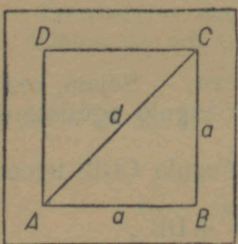
$$\boxed{h = \frac{a\sqrt{3}}{2}.}$$

A altura de um triângulo eqüilátero é igual à metade do lado multiplicada pela raiz de três.

194. **Diagonal do quadrado.** — Sejam, respectivamente, *d* a diagonal e *a* o lado do quadrado ABCD, figura a seguir. No triângulo retângulo ABC, temos

$$d^2 = a^2 + a^2$$

$$d^2 = 2a^2.$$



Extraindo a raiz quadrada de ambos os membros da igualdade, vem

$$d = \sqrt{2a^2}$$

$$\boxed{d = a\sqrt{2}.}$$

A diagonal de um quadrado é igual ao produto do lado pela raiz de dois.

195. Exercícios resolvidos. — 1.º *Calcular a altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo, sabendo que os segmentos que determina sôbre a hipotenusa medem, respectivamente, 14 cm e 56 cm.*

Aplicando a fórmula

$$h^2 = mn,$$

encontramos, sucessivamente,

$$h^2 = 14 \times 56$$
$$h^2 = 784$$
$$h = \sqrt{784}$$
$$h = 28 \text{ cm}.$$

2.º *A altura de um triângulo retângulo determina, sôbre a hipotenusa, segmentos que medem, respectivamente, 5 e 4 cm. Calcular os catetos do triângulo.*

Determinemos, preliminarmente, a hipotenusa:

$$a = m + n$$
$$a = 5 + 4$$
$$a = 9 \text{ cm}.$$

Aplicando, depois, as fórmulas

$$b^2 = am \quad \text{e} \quad c^2 = an,$$

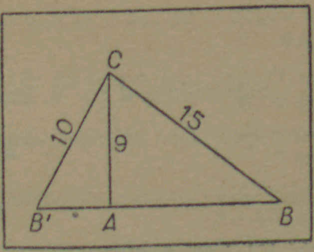
encontramos, sucessivamente,

$$\begin{array}{l|l} b^2 = 9 \times 5 & c^2 = 9 \times 4 \\ b^2 = 45 & c^2 = 36 \\ b = \sqrt{45} & c = \sqrt{36} \\ b = 6{,}7 \text{ cm}. & c = 6 \text{ cm}. \end{array}$$

3.º *A distância de um ponto a um segmento retilíneo é de 9 cm, e as distâncias do mesmo ponto aos extremos do segmento são de 15 e 10 cm, respectivamente. Quanto mede o segmento?*

Admitamos seja C o ponto dado e B'B o segmento cuja medida queremos obter.

Tracemos CA, perpendicular a B'B, e depois tracemos CB e CB'.



No triângulo retângulo ABC, temos, pelo teorema de Pitágoras,

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2,$$

ou

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2.$$

Mas, notando que

$$BC = 15 \text{ cm} \quad \text{e} \quad AC = 9 \text{ cm},$$

resulta

$$\overline{AB}^2 = 15^2 - 9^2$$

$$\overline{AB}^2 = 225 - 81$$

$$\overline{AB}^2 = 144$$

$$AB = \sqrt{144},$$

$$AB = 12 \text{ cm.}$$

Considerando, agora, o triângulo AB′C, temos, pelo mesmo motivo,

$$\overline{AB'}^2 = \overline{B'C}^2 - \overline{AC}^2$$

$$\overline{AB'}^2 = 10^2 - 9^2$$

$$\overline{AB'}^2 = 100 - 81$$

$$\overline{AB'}^2 = 19,$$

$$AB' = \sqrt{19}$$

$$AB' = 4{,}3 \text{ cm.}$$

Mas, como

$$B'B = B'A + AB,$$

segue-se que

$$B'B = 4{,}3 + 12$$

$$B'B = 16{,}3 \text{ cm.}$$

4.º *Calcular, com aproximação de 1 mm, o lado do quadrado cuja diagonal mede 6 m.*

Da fórmula

$$d = a\sqrt{2},$$

deduzimos

$$a = \frac{d}{\sqrt{2}},$$

ou, multiplicando os têrmos da fração pela raiz de 2,

$$a = \frac{d\sqrt{2}}{2}.$$

Substituindo d por 6, encontramos

$$a = \frac{6 \times 1{,}414}{2}$$

$$a = 4{,}242 \text{ m.}$$

5.º *Qual a altura do triângulo eqüilátero cujo perímetro é igual a 21 metros?*

Calculemos, primeiramente, o lado do triângulo:

$$a = \frac{21}{3}$$

$$a = 7 \text{ m.}$$

Aplicando a fórmula

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

obtemos

$$h = \frac{7 \times 1{,}732}{2}$$

$$h = 6{,}062 \text{ m.}$$

196. **Exercícios propostos.**

1. Os catetos de um triângulo retângulo são: $b = 56$ e $c = 33$. Calcular a hipotenusa. R. 65.
2. Em um triângulo retângulo, os catetos são: $b = 34{,}75$ e $c = 28{,}05$. Calcular a hipotenusa. R. 44,65.
3. A hipotenusa de um triângulo retângulo mede 53 m e um dos catetos mede 45 m. Calcular o outro cateto. R. 28 m.
4. Em um triângulo retângulo, a hipotenusa mede 6,28 m e um dos catetos mede 3,06 m. Calcular o outro cateto. R. 5,48 m.
5. Calcular a altura de um triângulo retângulo, sabendo que os segmentos que ela determina sôbre a hipotenusa são $m = 12$ e $n = 27$. R. 18.
6. Em um triângulo retângulo, a hipotenusa mede 45 m e a projeção sôbre ela de um dos catetos mede 20 m. Calcular êsse cateto. R. 30 m.
7. Um dos catetos de um triângulo retângulo mede 18 m e a sua projeção sôbre a hipotenusa mede 7,2 m. Calcular a hipotenusa. R. 45 m.
8. A altura de um triângulo retângulo determina sôbre a hipotenusa os segmentos $m = 3{,}6$ e $n = 6{,}4$. Calcular os catetos do triângulo. R. 6 e 8.
9. Em um triângulo retângulo, a hipotenusa mede 15 m e um dos catetos mede 12 m. Calcular a altura relativa à hipotenusa. R. 7,2 m.
10. Os catetos de um triângulo retângulo são: $b = 12$ e $c = 16$. Calcular a altura relativa à hipotenusa. R. 9,6.
11. O perímetro de um triângulo isósceles mede 32 m e a base tem 12 m. Calcular a altura dêsse triângulo. R. 8 m.
12. Calcular os catetos de um triângulo retângulo isósceles, cuja hipotenusa mede 10 m. R. 7,07 m.
13. Calcular a hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles, cujo perímetro é igual a 13,65 m. R. 5,65 m.
14. Calcular os catetos de um triângulo retângulo isósceles, cujo perímetro é igual a 492,56. R. 144,26.

15. A hipotenusa de um triângulo retângulo é igual a 58 e a soma dos catetos é 82. Calcular os catetos. R. 40 e 42.

16. A hipotenusa de um triângulo retângulo é igual a 29 e a diferença entre os catetos é 1. Pedem-se os catetos. R. 20 e 21.

17. Calcular a altura do triângulo eqüilátero cujo lado é igual a 1,465. R. 1,268.

18. Calcular o lado do triângulo eqüilátero cuja altura é igual a 10,26. R. 11,84.

19. Calcular a diagonal do quadrado de lado igual a 15. R. 21,21.

20. Calcular o lado do quadrado cuja diagonal mede 18 m. R. 12,726 m.

21. No quadrado de lado igual a 8, tomam-se, a partir de cada vértice e sempre no mesmo sentido, segmentos iguais a 1,26. Calcular o perímetro do quadrado que tem para vértice os extremos dos quatro segmentos. R. 27,42.

22. Exprimir a hipotenusa de um triângulo retângulo em função de um dos catetos e da altura que parte do vértice do ângulo reto. R. $\frac{b^2}{\sqrt{b^2 - h^2}}$.

23. Exprimir um dos catetos de um triângulo retângulo em função do outro cateto e da altura relativa à hipotenusa. R. $\frac{bh}{\sqrt{b^2 - h^2}}$.

24. Exprimir o perímetro de um triângulo retângulo em função da hipotenusa e da diferença entre os catetos. R. $a + \sqrt{2a^2 - d^2}$.

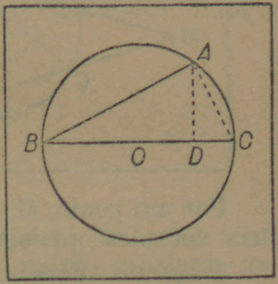
Capítulo XI

RELAÇÕES MÉTRICAS NO CÍRCULO

197. **Linhas proporcionais no círculo.** — Aplicando as proposições anteriormente demonstradas, cuidemos agora de obter as principais relações entre as linhas proporcionais no círculo e a construção geométrica de algumas delas.

Essas relações são estabelecidas nos teoremas de que nos ocupamos a seguir.

198. **Teorema.** — *Qualquer corda da circunferência é média proporcional entre a sua projeção sôbre o diâmetro que passa por uma de suas extremidades e o diâmetro inteiro.*



Na circunferência de centro O, consideremos a corda BA e o diâmetro BC, com o extremo comum B.

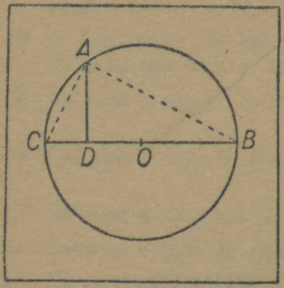
Tracemos, depois, AD perpendicular ao diâmetro e liguemos os pontos A e C.

Forma-se, assim, o triângulo ABC, que é retângulo em A, pois êste ângulo é inscrito em semicircunferência.

Notando que BD é a projeção do cateto AB sôbre a hipotenusa BC, temos, de acôrdo com proposição anterior (n. 188),

$$\overline{AB}^2 = BD \times BC.$$

199. **Teorema.** — *Se, de qualquer ponto da circunferência, baixarmos perpendicular sôbre um diâmetro, o segmento da perpendicular compreendido entre a circunferência e o diâmetro é média proporcional entre os segmentos que, sôbre êle, determina.*



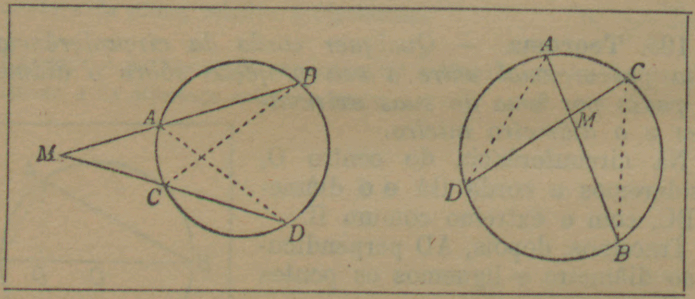
Do ponto A, pertencente à circunferência, tracemos AD, perpendicular ao diâmetro CB.

Ligando, depois, o ponto A aos extremos do diâmetro, forma-se o triângulo ABC, que é retângulo em A.

Mas, tendo em vista que AD é a altura do triângulo relativa à hipotenusa, BC, e que BD e DC são os segmentos que sôbre ela determina, segue-se, em virtude de proposição anterior (n.º 188), que

$$\overline{AD}^2 = BD \times DC.$$

200. **Teorema.** — *Se, de qualquer ponto do plano a que pertence um círculo, tirarmos secantes a êsse círculo, o produto das distâncias dêsse ponto aos dois pontos de interseção de cada secante com a circunferência é constante.*



Por um ponto, M, exterior ou interior ao círculo, tracemos duas secantes quaisquer, MAB e MCD.

Traçando, depois, as cordas AD e CB, formam-se os triângulos MAD e MCB, nos quais

$$\hat{B} = \hat{D},$$

como ângulos inscritos no mesmo segmento, e

$$\widehat{BMC} = \widehat{DMA},$$

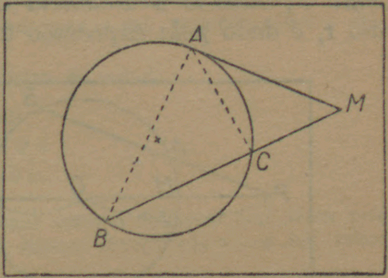
como ângulo comum na figura à esquerda e opostos pelo vértice na figura à direita.

São, pois, semelhantes pelo primeiro caso os triângulos considerados, e temos

$$\frac{MD}{MB} = \frac{MA}{MC},$$

de onde resulta $MD \times MC = MB \times MA.$

201. **Teorema.** — *Se, por um ponto exterior a um círculo, traçarmos uma tangente e uma secante, a tangente é média proporcional entre o segmento exterior da secante e a secante tôda.*



Pelo ponto exterior ao círculo, M, tracemos a tangente MA e a secante MB.

Traçando as cordas AB e AC, consideremos os triângulos MAB e MAC, nos quais

$$\hat{M} = \hat{M},$$

como ângulo comum, e

$$A\hat{B}C = M\hat{A}C,$$

como ângulos de mesma medida, que é a metade do arco AC.

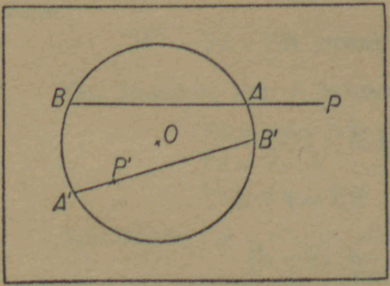
São, pois, semelhantes pelo primeiro caso êsses triângulos, e temos

$$\frac{MA}{MB} = \frac{MC}{MA},$$

de onde se deduz

$$\overline{MA}^2 = MC \times MB.$$

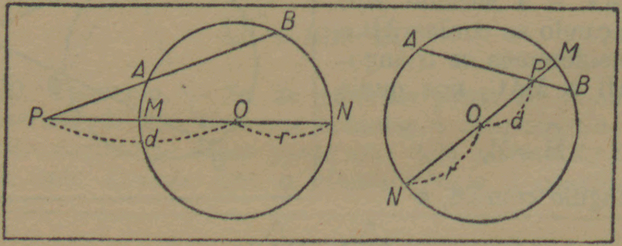
202. **Definição.** — Dá-se a denominação de *potência de um ponto em relação a um círculo* ao produto constante das medidas algébricas dos segmentos orientados que têm a origem nesse ponto e cujos extremos são os pontos de interseção de uma secante que passe pelo ponto com a circunferência.



Assim, PA . PB é a potência do ponto P e P'B'. P'A' é a potência do ponto P' em relação ao círculo de centro O, figura ao lado.

Com respeito ao sinal da potência de um ponto em relação a um círculo, devemos notar que, quando o ponto é exterior, o produto PA . PB é positivo, pois são de mesmo sentido os segmentos PA e PB, e que, quando o ponto é interior, o produto P'A' . P'B' é negativo, de vez que são de sentido contrário os segmentos P'A' e P'B'.

203. **Teorema.** — *O valor absoluto da potência de um ponto P, situado à distância* d *do centro de um círculo de raio* r, *é dado pela expressão* $d^2 - r^2$.



I. Consideremos o ponto exterior ao círculo P.

Por definição, temos

$$PA \times PB = PM \times PN.$$

Mas, notando que

$$PM = d - r \quad \text{e} \quad PN = d + r,$$

segue-se que

$$PA \times PB = (d - r)(d + r)$$

$$PA \times PB = d^2 - r^2.$$

II. Seja, agora, o ponto interior, P.

Como no primeiro caso, temos

$$PA \times PB = PM \times PN.$$

Mas, como

$$PM = r - d \quad \text{e} \quad PN = r + d,$$

segue-se que

$$PA \times PB = (r - d)(r + d)$$

$$PA \times PB = r^2 - d^2.$$

Tendo, porém, em conta que a potência do ponto em relação ao círculo, nesse caso, é negativa, o seu valor relativo será expresso por

$$-(r^2 - d^2).$$

Conseqüentemente:

$$PA \times PB = d^2 - r^2.$$

204. **Exercícios resolvidos.** — 1.º *De certo ponto pertencente a uma circunferência, cujo raio mede 8 metros, tiram-se um diâmetro e uma corda; calcular o comprimento desta, sabendo que a sua projeção sôbre o diâmetro mede 9 metros.*

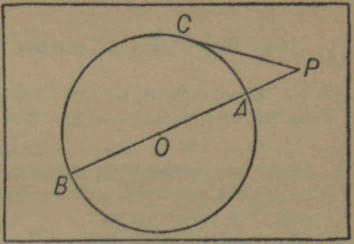
Calculemos primeiramente o diâmetro do círculo:

$$D = 2R$$
$$D = 2 \times 8$$
$$D = 16 \text{ m}.$$

Como a corda é média proporcional entre o diâmetro que passa pela extremidade e a sua projeção sôbre o mesmo, designando-a por AB, temos

$$\overline{AB}^2 = 16 \times 9$$
$$\overline{AB}^2 = 144$$
$$AB = \sqrt{144}$$
$$AB = 12 \text{ m}.$$

2.º *Dá-se um círculo e um ponto situados no mesmo plano; tendo o círculo 5 metros de raio e sendo 9 metros a distância do ponto ao centro, pede-se o comprimento da tangente tirada, por êsse ponto, à circunferência.*



Pelo ponto P e passando pelo centro da circunferência dada, tracemos a secante PB, e seja PC a tangente procurada.

Conforme a relação conhecida, temos

$$\overline{PC}^2 = PA \times PB. \qquad (1)$$

Mas, de acôrdo com os dados,

$PA = PO - OA$	$PB = PO + OB$
$PA = 9 - 5$	$PB = 9 + 5$
$PA = 4$ m.	$PB = 14$ m.

Substituindo PA e PB por seus valores na relação (1), obtemos

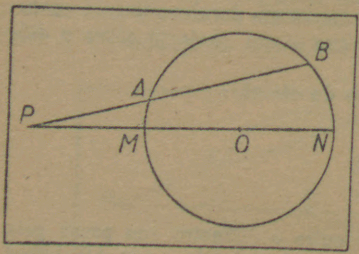
$$\overline{PC}^2 = 4 \times 14$$

$$\overline{PC}^2 = 56.$$

$$PC = \sqrt{56}$$

$$PC = 7{,}483 \text{ m.}$$

3.º *Por um ponto situado a 10 metros do centro de um círculo, cujo raio mede 4 metros, traça-se uma secante à circunferência; sabendo que o segmento exterior dessa secante mede 7 metros, pede-se o comprimento da corda interceptada, pela mesma, no círculo.*



Pelo ponto P, tracemos as secantes PB e PN, esta passando pelo centro da circunferência, e calculemos o comprimento da corda AB, que a primeira intercepta no círculo.

Como se sabe, o valor absoluto da potência de um ponto em relação a um círculo é dado pela expressão

$$PA \,.\, PB = d^2 - r^2.$$

Introduzindo, na relação acima, os elementos dados, encontramos

$$7PB = 10^2 - 4^2$$
$$7PB = 100 - 16$$
$$7PB = 84$$
$$PB = 12 \text{ m.}$$

Mas, como

$$AB = PB - PA,$$

segue-se que

$$AB = 12 - 7$$
$$AB = 5 \text{ m.}$$

205. Exercícios propostos.

1. No círculo de raio igual a 4,5 a projeção de certa corda sôbre o diâmetro que passa por um dos seus extremos é 4. Calcular a corda.
R. 6.
2. Dado um círculo de 18,65 m de raio, calcular uma corda dêsse círculo cuja projeção sôbre o diâmetro que lhe passa por uma das extremidades mede 10 m.
R. 19,31 m.
3. Uma corda e um diâmetro do círculo partem do mesmo ponto. A corda mede 12 m e o raio do círculo mede 8 m. Calcular a projeção dessa corda sôbre o diâmetro.
R. 9 m.
4. Duas cordas de um círculo, medindo 9 m e 12 m, respectivamente, partem do mesmo ponto e terminam nas extremidades do mesmo diâmetro. Calcular o raio dêsse círculo.
R. 7,5 m.
5. Calcular o raio de um círculo, sabendo-se que a projeção de uma corda de 10,5 sôbre o diâmetro que lhe passa por um dos extremos é 4,57.
R. 12,06.

6. Dados um círculo de 8,2 m de raio e uma corda dêsse círculo de 1,3 m de comprimento, calcular a distância de um dos extremos da corda ao diâmetro que passa pelo outro extremo. R. 1,29 m.

7. Calcular o raio do círculo no qual uma corda de 12 m, perpendicular ao diâmetro, corta-o em um ponto cuja distância ao centro do círculo é de 8 m. R. 10 m.

8. Em duas cordas que se cortam no círculo, os segmentos da primeira são 4 e 5, respectivamente. Calcular o menor segmento da segunda, sabendo-se que o maior é 8. R. 2,5.

9. Dadas duas cordas de um círculo que se cortam, calcular o maior segmento de uma delas, sabendo-se que o menor é 1,65 e que os dois segmentos da outra são 3,47 e 10, respectivamente. R. 21,03.

10. Em duas cordas que se cortam no círculo, o produto dos segmentos da primeira é 12. Calcular os segmentos da segunda, sabendo-se que o menor é igual a um têrço do maior. R. 2 e 6.

11. Em duas cordas que se cortam no círculo, o produto dos segmentos da primeira é 27 e os segmentos da segunda estão na razão de 4 para 3. Calcular os segmentos da segunda corda. R. 6 e 4,5.

12. Duas secantes ao círculo partem do mesmo ponto. A parte externa da primeira tem 3 m e a interna tem 4,5 m. Calcular a parte interna da segunda, sabendo-se que a externa tem 3,75 m. R. 2,25 m.

13. Duas secantes ao círculo partem do mesmo ponto. Na primeira, a parte externa tem 7,5 m e a interna tem 4,5 m. Calcular as duas partes da segunda, sabendo-se que o seu comprimento total é 18 m. R 5 m e 13 m.

14. Uma secante e uma tangente à circunferência partem do mesmo ponto. A parte externa da secante tem 0,9 m e a interna tem 0,7 m. Calcular a tangente. R. 1,2.

15. Calcular a distância de um ponto a um círculo, sendo 10,8 o raio e a potência do ponto igual ao quadrado do raio. R. 4,47.

16. Calcular o raio de um círculo, sabendo-se que a distância de certo ponto ao círculo é 1,86 e que a potência dêsse ponto é 8,94. R. 1,47.

17. Calcular o raio de um círculo, sendo a distância dêle a certo ponto igual a 3,1 e sendo a potência do ponto igual a 10. R. 0,06.

18. Dados um círculo e um ponto de potência igual a 18,6, calcular o segmento de uma tangente compreendida entre o ponto e o círculo. R. 4,31.

19. Calcular a potência de um ponto em relação a um círculo sendo o segmento de uma tangente compreendida entre o ponto e o círculo igual a 2,8. R. 7,84.

20. Sendo 10 a potência de um ponto em relação a um círculo, cujo centro dista 12,6 do ponto, calcular o raio do círculo. R. 12,19.

21. Sendo r o raio de um círculo e a uma corda, exprimir, em função dêsses elementos, a distância de uma das extremidades da corda ao diâmetro que passa pela outra extremidade. R. $\frac{a}{2r}\sqrt{4r^2 - a^2}$.

22. Dados um círculo de raio r e uma corda a, exprimir, em função de tais elementos, as projeções sôbre o diâmetro perpendicular a essa corda dos lados de um quadrilátero inscrito nesse círculo, cujos vértices sejam as extremidades da corda e as do diâmetro perpendicular à corda.

R. $\dfrac{2r \pm \sqrt{4r^2 - a^2}}{2}$.

23. Exprimir, em função de P e a o raio de um círculo, sabendo que um ponto que tem para potência P se encontra a uma distância a do centro.

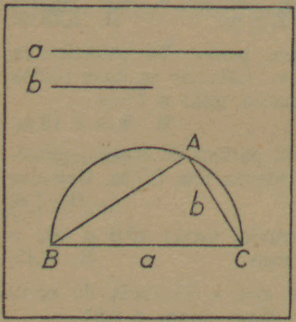
R. $\sqrt{a^2 - P}$.

24. Exprimir, em função do raio r, a distância entre uma circunferência e um ponto cuja potência é igual ao quadrado do raio.

R. $r(\sqrt{2} - 1)$.

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

206. **Problema I.** — *Construir um segmento cujo quadrado seja igual à diferença entre os quadrados de dois segmentos dados.*



Designando por a e b os segmentos dados e por x o procurado, devemos ter

$$x^2 = a^2 - b^2.$$

Sôbre uma reta qualquer, tomemos o segmento

$$BC = a$$

e tracemos a semicircunferência BAC, tendo BC como diâmetro.

Depois, fazendo centro em C e com raio igual a b, descrevamos um arco que corte a curva em certo ponto, A.

Ligando o ponto A aos pontos B e C, obtemos os segmentos AB e AC, o primeiro dos quais é o segmento procurado.

Com efeito, no triângulo CAB, retângulo em A, temos

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$$

de onde se deduz

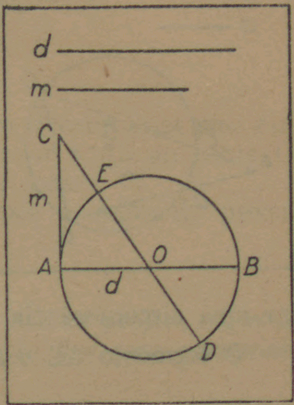
$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2$$

$$\overline{AB}^2 = a^2 - b^2.$$

Portanto:

$$AB = x.$$

207. **Problema II.** *Construir dois segmentos, dadas a sua diferença e a sua média proporcional.*



Designando respectivamente por d e m os segmentos dados e por x e y os procurados, devemos ter

$$x - y = d$$
$$xy = m^2.$$

Tomando o segmento

$$AB = d$$

como diâmetro, descrevamos uma circunferência.

Depois, sôbre a tangente a essa circunferência no ponto A, tomemos o segmento

$$AC = m.$$

Pelo ponto C, assim determinado, tracemos a secante CD, passando pelo centro da circunferência.

Obtemos, dêsse modo, os segmentos procurados

$$CD = x$$
$$CE = y.$$

Com efeito, temos

$$CD - CE = ED$$
$$CD - CE = AB$$
$$CD - CE = d.$$

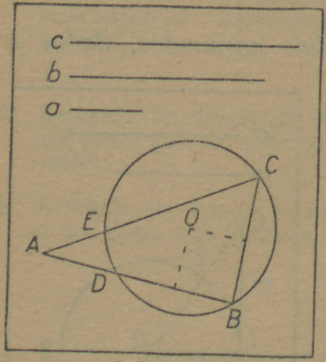
Por outro lado, considerando a tangente e a secante à circunferência que partem do ponto C, temos

$$\overline{CA}^2 = CD \, . \, CE$$

$$CD \, . \, CE = m^2.$$

208. **Problema III.** — *Determinar a quarta proporcional a três segmentos dados.*

Designando por a, b e c os segmentos dados e por x o segmento procurado, devemos ter



$$\frac{x}{a}=\frac{b}{c}.$$

Tracemos um ângulo qualquer, BAC. Sôbre os lados dêsse ângulo, tomemos os segmentos:

$$AB=b$$
$$AC=c$$
$$AD=a.$$

Depois, pelos pontos B, C e D, assim determinados, façamos passar uma circunferência. Esta determina sôbre AC o ponto E.

O segmento AE é a solução procurada:

$$AE=x.$$

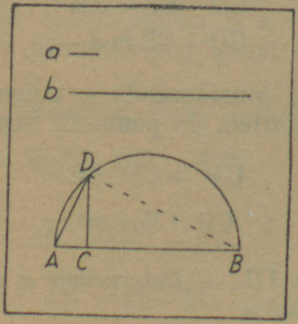
Com efeito, considerando as secantes ao círculo tiradas pelo ponto A, temos

$$\frac{AE}{AD}=\frac{AB}{AC},$$

ou

$$\frac{x}{a}=\frac{b}{c}.$$

209. **Problema IV.** — *Construir a média proporcional de dois segmentos dados.*



Designando por a e b os segmentos dados e por x o segmento pedido, devemos ter

$$x^2 = ab.$$

Sôbre uma reta, tomemos os segmentos

$$AC = a$$
$$AB = b.$$

Depois, tomando AB como diâmetro, descrevamos uma circunferência, e levantemos a perpendicular a AB no ponto C. Esta cortará a curva em um dos seus pontos, D.

Ligando os pontos A e D, obtemos o segmento procurado:

$$AD = x.$$

Com efeito, notando que a corda AD se projeta segundo AC sôbre o diâmetro que passa por um dos seus extremos, segue-se que

$$\overline{AD}^2 = AB \,.\, AC,$$

ou

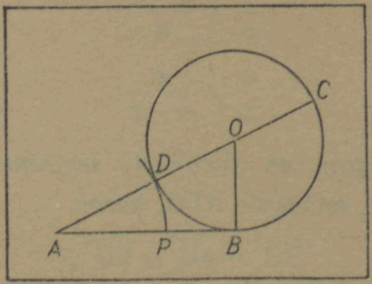
$$x^2 = ab.$$

210. **Divisão em média e extrema razão.** — Diz-se que um segmento fica dividido por um ponto em média e extrema razão quando a parte maior é média proporcional entre o segmento todo e a parte menor.

Seja dividir o segmento AB em média e extrema razão, figura a seguir.

Designando por a o segmento dado e por x o procurado, devemos ter

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a - x}.$$



Sôbre a perpendicular a AB no ponto B, tomemos o segmento

$$BO = \frac{AB}{2}.$$

Depois, fazendo centro em O e com raio igual a OB, descrevamos uma circunferência. Esta será tangente a AB no ponto B.

Pelos pontos A e O, conduzamos uma reta, a qual determina sôbre a circunferência os pontos C e D.

Obtém-se, dêsse modo, o segmento

$$AD = AP = x.$$

Com efeito, considerando a secante e a tangente à circunferência que partem do ponto A, temos

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AD}.$$

Admitindo $AD = x$, temos

$$AC = AD + DC = x + a$$
$$AB = a.$$

Fazendo as substituições, vem

$$\frac{x+a}{a} = \frac{a}{x}.$$

De acôrdo com as propriedades das proporções, podemos escrever

$$\frac{x+a-a}{a} = \frac{a-x}{x}$$

$$\frac{x}{a} = \frac{a-x}{x}$$

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}.$$

Passemos, agora, ao cálculo do *segmento áureo* x.

No triângulo retângulo ABO, temos

$$\overline{AO}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BO}^2,$$

ou, fazendo as substituições,

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2=a^2+\frac{a^2}{4}.$$

Efetuando as operações indicadas no segundo membro, vem

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2=\frac{5a^2}{4}.$$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os membros da equação e considerando apenas o sinal positivo do radical, obtemos

$$x+\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{5a^2}{4}}$$

$$x+\frac{a}{2}=\frac{a}{2}\sqrt{5}$$

ou, transpondo o têrmo conhecido para o segundo membro,

$$x=\frac{a}{2}\sqrt{5}-\frac{a}{2}.$$

Finalmente, colocando $\frac{a}{2}$ em evidência, encontramos

$$x=\frac{a}{2}\left(\sqrt{5}-1\right).$$

CAPÍTULO XII

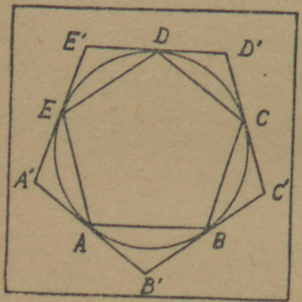
POLÍGONOS REGULARES

211. **Definições.** — *Polígono regular* é aquêle que tem todos os lados e todos os ângulos iguais.

Um polígono diz-se *inscrito* no círculo quando todos os seus vértices pertencem à circunferência, e diz-se *circunscrito* ao círculo quando todos os seus lados são tangentes à circunferência.

Os polígonos regulares podem ser convexos e não convexos, e recebem êstes a denominação de *polígonos regulares estrelados.*

212. **Teorema.** — *Dividindo uma circunferência em* n *partes iguais, as cordas que ligam os pontos de divisão consecutivos formam um polígono regular inscrito, e as tangentes traçadas pelos pontos de divisão formam um polígono regular circunscrito, ambos com* n *lados.*



I. Dividamos a circunferência vista na figura ao lado em partes iguais pelos pontos A, B, C,...

Ligando êsses pontos, formaremos um polígono inscrito de n lados. Seja o polígono ABCDE. — Temos

$$AB = BC = CD = DE = EA,$$

como cordas correspondentes a arcos iguais.

Por outro lado,

$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = \hat{E},$$

como ângulos inscritos de mesma medida, a saber,

$$\frac{n-2}{2}$$

divisões da circunferência.

Tendo todos os lados e ângulos iguais entre si, é regular o polígono inscrito considerado.

II. Consideremos, agora, o polígono circunscrito à circunferência formado pelas tangentes aos pontos de divisão.

Nos triângulos isósceles AB'B, BC'C, CD'D..., temos

$$AB = BC = CD = DE = EA,$$

como já se viu, e

$$B\hat{A}B' = A\hat{B}B' = B\hat{C}C' = C\hat{B}C' = ...,$$

como ângulos de igual medida.

São, pois, iguais êsses triângulos. — Portanto:

$$\hat{A'} = \hat{B'} = \hat{C'} = \hat{D'} = \hat{E'}$$

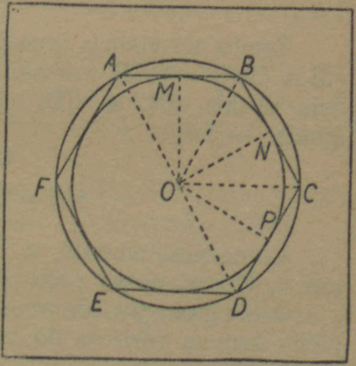
$$A'A = AB' = B'B = BC' = ...,$$

e, conseqüentemente,

$$A'B' = B'C' = C'D' = D'E' = E'A'.$$

Tendo todos os lados e ângulos iguais entre si, o polígono circunscrito considerado é regular.

213. **Propriedades dos polígonos regulares.** — *Todo polígono regular é inscritível e circunscritível* (teorema recíproco).



I. Seja o polígono regular ABCDEF, figura ao lado.

De acôrdo com a definição, os lados e ângulos do polígono são iguais.

Ademais sabemos que, por três vértices consecutivos, A, B e C, do polígono, passa uma circunferência, cujo centro, O, é dado pela interseção das mediatrizes dos lados AB e BC.

Demonstremos, pois, que essa circunferência passa também pelo vértice D e todos os demais do polígono.

Tracemos os raios OA, OB e OC e liguemos os pontos O e D.

Nos triângulos AOB e BOC, temos

$$OA = OB = OC,$$

como raios do mesmo círculo, e

$$AB = BC,$$

como lados de polígono regular.

São, pois, iguais e isósceles êsses triângulos. — Portanto:

$$O\hat{A}B = A\hat{B}O = O\hat{B}C = B\hat{C}O,$$

ou, simplesmente,

$$A\hat{B}O = B\hat{C}O. \qquad (1)$$

Por outro lado, sabe-se que

$$A\hat{B}C = B\hat{C}D. \qquad (2)$$

Subtraindo a primeira igualdade da segunda, vem

$$A\hat{B}C - A\hat{B}O = B\hat{C}D - B\hat{C}O$$

$$O\hat{B}C = O\hat{C}D$$

ou seja,

$$B\hat{C}O = O\hat{C}D.$$

Tendo em vista a igualdade supra, e notando que os triângulos OBC e OCD apresentam mais um lado comum, OC, e dois iguais, BC e CD, chega-se a que êles são também iguais. — Logo:

$$OD = OB$$

$$OD = OC = OB = OA.$$

Conseqüentemente, a circunferência que contém os pontos A, B e C passa pelo ponto D.

Anàlogamente, demonstra-se que a circunferência passa pelos demais vértices do polígono.

II. Consideremos, agora, os lados do polígono ABCDEF como cordas iguais da circunferência que lhe é circunscrita.

Estando essas cordas igualmente afastadas do centro do círculo, se tirarmos OM, ON, OP..., perpendiculares a AB, BC, CD..., respectivamente, teremos

$$OM = ON = OP\ldots$$

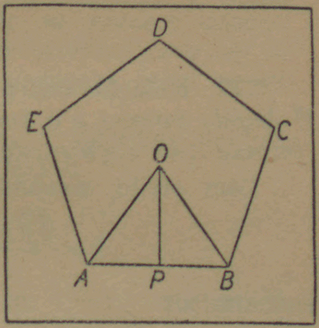
Em vista das igualdades supra, segue-se que a circunferência descrita do ponto O com o raio OM passa pelos pontos M, N, P...

Além disso, AB, BC, CD..., como perpendiculares aos raios OM, ON, OP..., em suas extremidades, são tangentes à circunferência considerada nos pontos M, N, P...

Portanto, o polígono é circunscritível à circunferência.

Notemos, ainda, que as circunferências inscrita e circunscrita ao polígono regular são concêntricas.

214. **Definições.** — Dá-se a denominação de *centro* de um polígono regular ao centro comum das circunferências inscrita e circunscrita a êsse polígono.



Raio de um polígono regular é a distância constante de qualquer vértice ao centro. — Exemplo: OA.

Apótema de um polígono regular é a distância constante de qualquer lado ao centro. — Exemplo: OP.

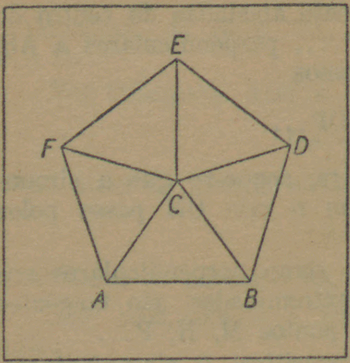
Notemos que o raio de um polígono regular é igual ao raio da circunferência circunscrita e o apótema é igual ao raio da circunferência inscrita ao polígono.

Ângulo interno, ou abreviadamente ângulo, de um polígono regular é o formado por dois lados consecutivos do polígono: — Exemplo: CDE.

Ângulo cêntrico de um polígono regular é o formado por dois raios consecutivos do polígono. — Exemplo: AOB.

215. **Expressão do ângulo interno.** — Recordemos que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo é dada pela expressão

$$S = 2r\ (n-2).$$



Como em um polígono regular convexo de n lados contam-se n ângulos, segue-se que, para obter o valor de um ângulo interno, basta dividir a soma de todos os ângulos pelo número dêles. — Temos, assim,

$$\boxed{\mathrm{I} = \frac{2r\,(n-2)}{n}.}$$

216. **Expressão do ângulo cêntrico.** — Em um polígono regular de n lados contam-se n ângulos cêntricos iguais. E, como a soma de todos equivale a 4 retos, o valor de cada um é

$$\boxed{\mathrm{C} = \frac{4r}{n}.}$$

217. **Relação entre os ângulos interno e cêntrico.** — *O ângulo interno e o ângulo cêntrico de um polígono regular convexo são suplementares.*

Com efeito, somando ordenadamente as expressões

$$\mathrm{I} = \frac{2r\,(n-2)}{n} \quad \text{e} \quad \mathrm{C} = \frac{4r}{n},$$

encontramos

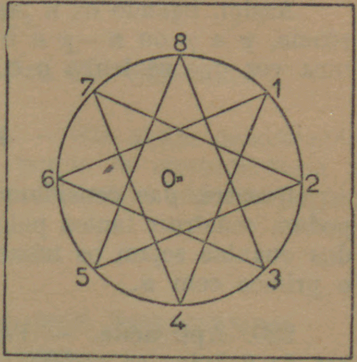
$$\mathrm{I} + \mathrm{C} = \frac{2rn - 4r}{n} + \frac{4r}{n}$$

$$\mathrm{I} + \mathrm{C} = \frac{2rn}{n}$$

$$\boxed{\mathrm{I} + \mathrm{C} = 2r.}$$

218. **Polígonos regulares estrelados.** — De acôrdo com as proposições demonstradas até aqui, se dividirmos qualquer circunferência em n partes e ligarmos os pontos assim determinados em sua ordem natural, obteremos um polígono regular convexo inscrito de n lados.

Vejamos, agora, o que se passa quando se ligam os pontos de divisão da circunferência de dois em dois, de três em três..., de p em p.



Para exemplificar, construímos a figura ao lado, dividindo a circunferência em oito partes iguais e ligando os pontos, assim determinados, de três em três.

Preliminarmente, notemos que, ligando n pontos, determinados pela divisão em partes iguais de uma circunferência, de p em p, forma-se uma linha poligonal regular, uma vez que os seus lados são todos iguais, como cordas correspondentes a arcos iguais e os seus ângulos também o são, como inscritos em arcos iguais.

Ademais, essa linha poligonal fechará quando a circunferência fôr descrita m vêzes, sendo m número natural, caso em que o número de divisões percorridas deve ser simultâneamente múltiplo de n e p, e, portanto, igual ao mínimo múltiplo comum de n e p.

Se n e p não forem primos entre si, admitem um máximo divisor comum, d. Nesse caso, temos

$$\text{m. m. c. de } (p \text{ e } n) = \frac{pn}{d}.$$

Mas, sendo p e n primos entre si, $d = 1$. — Portanto:

$$\frac{pn}{d} = pn.$$

O número de lados dos polígonos assim formados será dado pela relação

$$\frac{n}{d}.$$

Quando $d = 1$, temos

$$\frac{n}{d} = n.$$

219. **Observação.** — E' de notar que as cordas que ligam os pontos em que se divide a circunferência, tomadas

p a p, subtendem arcos, não só iguais a p divisões, como também a $n-p$ divisões.

Assim, ligando os n pontos em que se divide a circunferência, p a p ou $n-p$ a $n-p$, obtém-se o mesmo polígono, uma vez que se tenha o cuidado de tomar

$$p < \frac{n}{2}.$$

Decorre, das considerações até aqui expendidas, que se podem construir tantos polígonos regulares distintos de n lados quantos sejam os números menores que a metade de n, e primos com n.

220. **Aplicação.** — *Verificar quantos polígonos regulares de 9 lados se podem construir.*

Temos

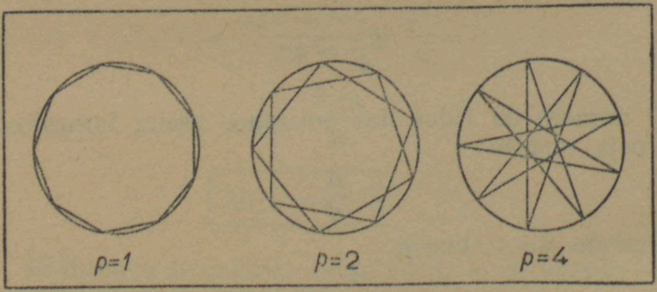
$$\frac{n}{2} = \frac{9}{2} = 4{,}5.$$

Portanto, os números primos com 9 e menores que 4,5 são

$$1,\ 2 \text{ e } 4.$$

Dividindo, pois, a circunferência em 9 partes iguais, e ligando os pontos obtidos, de um em um, de dois em dois e de quatro em quatro, obtemos três eneágonos regulares, o primeiro dos quais é convexo e os demais estrelados.

Na figura que segue encontram-se traçados de três polígonos a que nos referimos.



221. **Observação.** — Notemos que, na inscrição de polígonos regulares à circunferência, quando

$$p = 1,$$

o polígono que se obtém é convexo, e quando

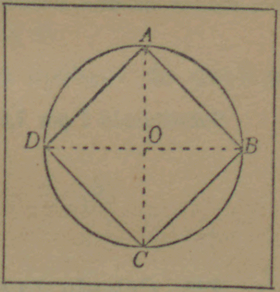
$$p > 1,$$

o polígono ou os polígonos obtidos são estrelados.

222. **Cordas suplementares.** — São assim denominadas duas cordas tiradas do mesmo ponto da circunferência às extremidades de um diâmetro, cordas essas que são perpendiculares entre si.

RELAÇÕES MÉTRICAS NOS POLÍGONOS REGULARES

223. **Construção e cálculo do lado do quadrado inscrito.** — Para inscrever o quadrado num círculo, tracemos dois diâmetros perpendiculares entre si: sejam AC e BD, figura ao lado.



Ligando, dois a dois, os extremos dêsses diâmetros, forma-se o quadrado inscrito ABCD.

Com efeito, sendo retos os ângulos centrais determinados pela interseção dos diâmetros, os arcos que lhes correspondem são todos iguais a um quadrante.

No triângulo AOB, temos, de acôrdo com o teorema de Pitágoras,

$$\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2$$

ou, designando AB por l, e notando que OA e OB são raios do círculo,

$$l^2 = R^2 + R^2$$

$$l^2 = 2R^2$$

$$\boxed{l_4 = R\sqrt{2}.} \qquad (1)$$

O lado do quadrado inscrito é igual ao raio do círculo multiplicado pela raiz de 2.

224. **Exercícios.** — 1.º *Calcular, com a aproximação de 1 mm, o lado do quadrado inscrito no círculo cujo raio mede 6 m.*

Aplicando a fórmula (1)

$$l_4 = R\sqrt{2},$$

encontramos

$$l = 6 \times 1{,}414$$
$$l = 8{,}484 \text{ m}.$$

2.º *Calcular o raio do círculo circunscrito ao quadrado, cujo perímetro mede 30 m.*

Notemos que

$$l = \frac{30}{4}$$
$$l = 7{,}5 \text{ m}.$$

Por outro lado, da fórmula (1)

$$l_4 = R\sqrt{2},$$

deduzimos imediatamente

$$R = \frac{l}{\sqrt{2}},$$

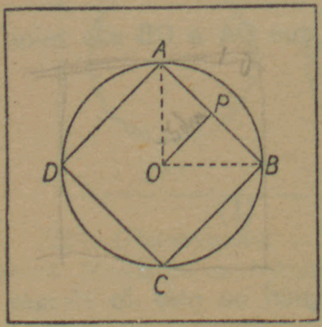
ou, racionalizando o denominador da fração,

$$R = \frac{l\sqrt{2}}{2}.$$

Substituindo l por 7,5, encontramos

$$R = \frac{7{,}5 \times 1{,}414}{2}$$
$$R = 5{,}302 \text{ m}.$$

225. **Cálculo do apótema do quadrado inscrito.** — Consideremos o quadrado inscrito ABCD, figura ao lado, e seja OP o seu apótema.



No triângulo retângulo OPA, temos

$$\overline{OP}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{AP}^2.$$

Mas, notando que

$$AP = \frac{AB}{2},$$

segue-se que

$$\overline{OP}^2 = \overline{OA}^2 - \frac{\overline{AB}^2}{4}.$$

Fazendo $OP = a$, $OA = R$ e $AB = l$, vem

$$a^2 = R^2 - \frac{l^2}{4},$$

ou, exprimindo o lado do quadrado em função do raio (n. 223)

$$a^2 = R^2 - \frac{\left(R\sqrt{2}\right)^2}{4}$$

$$a^2 = R^2 - \frac{2R^2}{4} \quad \text{ou} \quad a^2 = \frac{2R^2}{4}$$

$$\boxed{a_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}.} \qquad (2)$$

O apótema do quadrado inscrito é igual à metade do produto do raio do círculo pela raiz de 2.

Cumpre notar, além disso, que o apótema do quadrado é igual à metade do lado. — Assim:

$$\boxed{a = \frac{l}{2}.} \qquad (3)$$

226. **Exercício.** — *Calcular o apótema do quadrado inscrito no círculo cujo raio mede 6,5 m.*

Aplicando a fórmula (2)

$$a = \frac{R\sqrt{2}}{2},$$

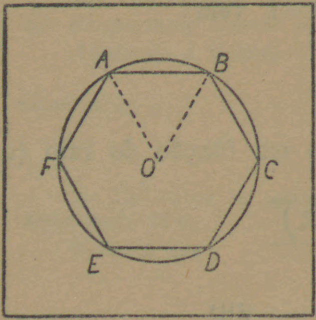
encontramos

$$a = \frac{6{,}5 \times 1{,}414}{2}$$

$$a = 4{,}595 \text{ m.}$$

227. **Construção e cálculo do lado do hexágono regular inscrito.** — Supondo o problema resolvido, admitamos que ABCDEF seja um hexágono regular inscrito no círculo.

Tracemos os raios OA e OB.



No triângulo isósceles AOB, temos

$$A\hat{O}B = 60^{\circ},$$

como ângulo cêntrico de um hexágono regular. — Conseqüentemente:

$$O\hat{A}B + O\hat{B}A = 120^{\circ}.$$

Por outro lado, como

$$O\hat{A}B = O\hat{B}A,$$

é bem de ver que cada um dêsses ângulos mede 60°.

Chega-se, assim, a que o triângulo AOB é eqüiângulo e, portanto, eqüilátero. — Logo:

$$AB = OA,$$

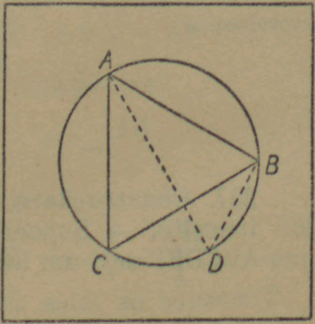
ou, designando AB por l e OA pela letra R,

$$\boxed{l_6 = R.} \qquad (4)$$

O lado do hexágono regular inscrito é igual ao raio do círculo.

De acôrdo com o exposto, para inscrever no círculo um hexágono regular, basta marcar sôbre a circunferência, com a abertura do compasso igual ao raio, os arcos AB, BC, CD..., e traçar as cordas correspondentes a êsses arcos.

228. **Construção e cálculo do lado do triângulo regular inscrito.** — Para inscrever o triângulo eqüilátero no círculo, basta dividir a circunferência em seis partes (n.º 227), e ligar os pontos de divisão de dois em dois.



Seja AB o lado do triângulo regular inscrito. A partir de B, tiremos BD igual ao lado do hexágono regular inscrito, e liguemos os pontos A e D.

Notando que AB e BD são cordas suplementares, e que AD é diâmetro do círculo, consideremos o triângulo retângulo ABD. — Temos

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{BD}^2.$$

Substituindo, na expressão acima, AD por 2R, BD por R e fazendo $AB = l$, vem

$$l^2 = 4R^2 - R^2$$

$$l^2 = 3R^2$$

$$\boxed{l_3 = R\sqrt{3}.} \qquad (5)$$

O lado do triângulo regular inscrito é igual ao raio do círculo multiplicado pela raiz de 3.

229. **Exercícios.** — 1.º *Calcular o lado do triângulo regular inscrito no círculo cujo raio mede 1,2 m.*

Aplicando a fórmula (5)

$$l_3 = R\sqrt{3},$$

encontramos

$$l = 1{,}2 \times 1{,}732$$

$$l = 2{,}078 \text{ m}.$$

2.º *O lado de um quadrado inscrito tem 7,2 m; pede-se o lado do triângulo regular inscrito no mesmo círculo.*

Empregando a fórmula (1)

$$l_4 = R\sqrt{2},$$

calculemos o raio do círculo:

$$7{,}2 = R\sqrt{2},$$

de onde tiramos

$$R = \frac{7{,}2}{\sqrt{2}}.$$

Racionalizando o denominador da fração, vem

$$R = \frac{7{,}2 \times \sqrt{2}}{2}.$$

Efetuando, encontramos

$$R = 5{,}090 \text{ m}.$$

Aplicando, agora, a fórmula (5)

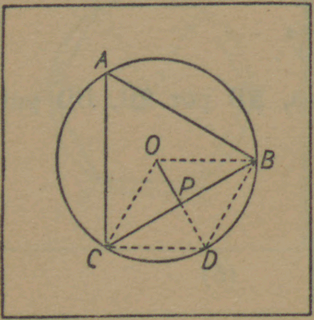
$$l_3 = R\sqrt{3},$$

encontramos

$$l = 5{,}090 \times 1{,}732$$

$$l = 8{,}815 \text{ m}.$$

230. Cálculo do apótema do triângulo regular inscrito. — Seja OP o apótema do triângulo regular inscrito ABC, figura ao lado.



Prolonguemos OP até encontrar a circunferência em D. Traçando os raios OB e OC e ligando os pontos D e B e D e C, forma-se o quadrilátero BOCD, que é losango, pois tem os quatro lados iguais, dois como raios do círculo e dois como lados do hexágono regular inscrito. — E, como as diagonais do losango cortam-se ao meio,

$$OP = PD.$$

Conseqüentemente:

$$OP = \frac{OD}{2}$$

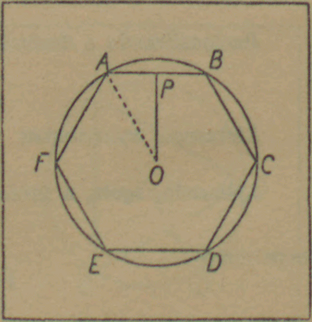
$$\boxed{a_3 = \frac{R}{2}.} \qquad (6)$$

O apótema do triângulo regular inscrito é igual à metade do raio do círculo.

231. Cálculo do apótema do hexágono regular inscrito. — Consideremos o hexágono regular inscrito ABCDEF, e seja OP o seu apótema.

Traçando o raio OA, formamos o triângulo retângulo APO, no qual

$$\overline{OP}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{AP}^2.$$



Fazendo $OP = a$, $OA = R$, e notando que

$$AP = \frac{AB}{2} \quad \text{ou} \quad AP = \frac{R}{2},$$

obtemos

$$a^2 = R^2 - \frac{R^2}{4}$$

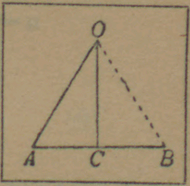
$$a^2 = \frac{3R^2}{4}$$

$$\boxed{a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}.} \qquad (7)$$

O apótema do hexágono regular inscrito é igual à metade do produto do raio do círculo pela raiz de 3.

232. **Expressão do apótema de um polígono regular.** — Apesar de já têrmos estabelecido diretamente, nos problemas anteriores, as expressões dos apótemas do quadrado, do triângulo regular e do hexágono regular inscritos em função do raio do círculo, cuidemos, resolvendo o presente problema, de obter, de modo geral, o valor do apótema de um polígono regular qualquer em função do lado e do raio.

Seja AB o lado de um polígono regular, e OC o seu apótema.



Traçando os raios OA e OB, forma-se sempre, com os elementos considerados do polígono regular inscrito, um triângulo retângulo, ACO, no qual a hipotenusa, OA, é o raio, um dos catetos, OC, é o apótema e o outro, AC, é a metade do lado.

Temos, assim,

$$\overline{OC}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{AC}^2$$

$$\overline{OC}^2 = \overline{OA}^2 - \frac{\overline{AB}^2}{4},$$

ou, fazendo $OC = a$, $OA = R$ e $AB = l$,

$$a^2 = R^2 - \frac{l^2}{4}$$

$$a^2 = \frac{4R^2 - l^2}{4} \quad \text{ou} \quad a^2 = \frac{1}{4}(4R^2 - l^2)$$

$$\boxed{a = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - l^2}.} \qquad (8)$$

233. **Observação.** — Quando é conhecido o valor do lado do polígono em função do raio, pode-se obter, substituindo na fórmula

$$a = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - l^2},$$

l por êsse valor, a expressão do apótema simplesmente em função do raio.

Como exemplo, consideremos o caso do quadrado, em que (n.º 223)

$$l = R\sqrt{2}.$$

Fazendo a substituição mencionada, vem

$$a = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - \left(R\sqrt{2}\right)^2}$$

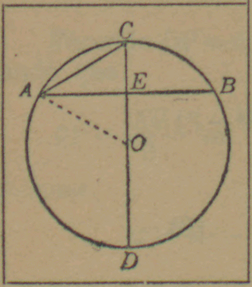
$$a = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - 2R^2} \quad \text{ou} \quad a = \frac{1}{2}\sqrt{2R^2}$$

$$a = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

que é precisamente a fórmula que estabelecemos diretamente no parágrafo 225.

234. **Lado do polígono regular de 2n lados.** — Seja AB o lado de um polígono regular de n lados, inscrito no círculo de raio OA.

Tracemos o diâmetro CD, perpendicular a AB. Ligando os pontos A e C, obtemos a corda AC, que é o lado do polígono regular de número de lados.



Notando que qualquer corda da circunferência é média proporcional entre a sua projeção sôbre o diâmetro que passa por uma de suas extremidades e o diâmetro inteiro, segue-se que

$$\overline{AC}^2 = CD \times CE.$$

Por outro lado, temos $CD = 2R$, e

$CE = OC - OE$ ou $CE = R - a$,

em que a é o apótema do polígono de n lados. — Logo:

$$\overline{AC}^2 = 2R(R - a)$$

$$\overline{AC}^2 = 2R^2 - 2R \cdot a.$$

Mas, tendo em vista que (n.º 232)

$$a = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - l^2}$$

segue-se que

$$\overline{AC}^2 = 2R^2 - 2R \times \frac{\sqrt{4R^2 - l^2}}{2}$$

$$\overline{AC}^2 = 2R^2 - R\sqrt{4R^2 - l^2}$$

$$AC = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - l^2}}$$

ou, fazendo $AC = l_{2n}$

$$\boxed{l_{2n} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - l^2}}.} \qquad (9)$$

235. **Aplicações.** — I. *Cálculo do lado do octógono regular convexo.* — Substituindo, na fórmula (9)

$$l_{2n} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - l^2}},$$

o lado do quadrado inscrito, l, pelo seu valor em função do raio

$$l_4 = R\sqrt{2},$$

encontramos, sucessivamente,

$$l_8 = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - 2R^2}}$$

$$l_8 = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{2R^2}}$$

$$l_8 = \sqrt{2R^2 - R^2\sqrt{2}} \quad \text{ou} \quad l_8 = \sqrt{R^2\left(2 - \sqrt{2}\right)}$$

$$\boxed{l_8 = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}.} \qquad (10)$$

II. *Cálculo do lado do dodecágono regular convexo.* — Substituindo, na fórmula (9),

$$l_{2n} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - l^2}},$$

o lado do hexágono regular inscrito, pelo seu valor em função do raio,

$$l_6 = R,$$

encontramos

$$l_{12} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - R^2}}$$

$$l_{12} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{3R^2}}$$

$$l_{12} = \sqrt{2R^2 - R^2\sqrt{3}} \quad \text{ou} \quad l_{12} = \sqrt{R^2\left(2 - \sqrt{3}\right)}$$

$$\boxed{l_{12} = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}.} \qquad (11)$$

236. **Exercício.** — *Calcular o lado do octógono regular inscrito no círculo cujo raio mede 6 m.*

Aplicando a fórmula (10)

$$l_8 = R\sqrt{2 - \sqrt{2}},$$

obtemos

$$l = 6\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$l = 6\sqrt{2 - 1,414}$$

$$l = 6\sqrt{0,586} \quad \text{ou} \quad l = 6 \times 0,765$$

$$l = 4,59 \text{ m}.$$

237. Cálculo do lado do decágono regular convexo. — Supondo o problema resolvido, admitamos que seja AB o lado do decágono regular convexo inscrito no círculo.

Tracemos os raios OA e OB e o apótema, OD, do polígono.

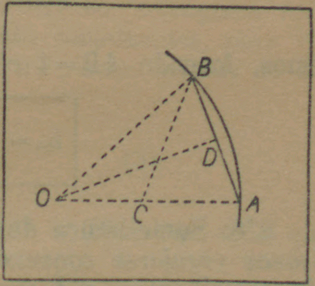
No triângulo isósceles AOB, temos

$$A\hat{O}B = 36^\circ,$$

como ângulo cêntrico do decágono regular convexo. — Logo:

$$A\hat{B}O = 72^\circ \quad \text{e} \quad B\hat{A}O = 72^\circ.$$

Traçando a bissetriz, BC, do ângulo ABO, consideremos o triângulo ABC. — Temos



$$A\hat{B}C = \frac{A\hat{B}O}{2} = 36^\circ,$$

e como $B\hat{A}C = 72^\circ$, segue-se que

$$B\hat{C}A = 72^\circ.$$

É, pois, isósceles o triângulo ABC. — Portanto:

$$AB = BC. \qquad (1)$$

Por outro lado, vejamos, ainda, que o triângulo OBC também é isósceles, uma vez que

$$O\hat{B}C = 36^\circ \quad \text{e} \quad B\hat{O}C = 36^\circ.$$

Temos, pois,

$$OC = BC. \qquad (2)$$

Mas, como a bissetriz de qualquer ângulo de um triângulo divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos lados que formam êsse ângulo (n.º 157), no triângulo AOB podemos estabelecer a relação seguinte:

$$\frac{OC}{AC} = \frac{OB}{AB}.$$

Tendo em vista as igualdades (1) e (2) e que OA = OB:

$$\frac{OC}{AC} = \frac{OA}{OC}$$

$$\overline{OC}^2 = OA \, . \, AC.$$

A igualdade supra indica que o ponto C divide o raio do círculo em duas partes, OC e OA, uma das quais é média proporcional entre o raio e a outra parte. Portanto, OC é o maior segmento do raio, quando dividido em média e extrema razão.

Mas, pelas igualdades (1) e (2), temos

$$OC = AB.$$

Conseqüentemente:

$$\overline{AB}^2 = OA \,.\, AC.$$

Ademais, como êsse segmento é dado pela expressão

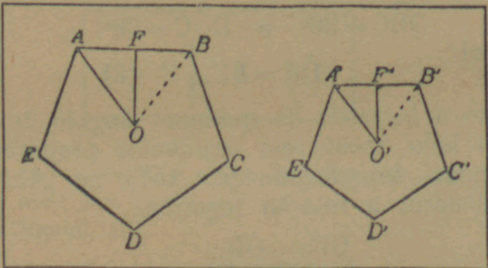
$$AB = \frac{OA\left(\sqrt{5}-1\right)}{2},$$

temos, fazendo $AB = l$ e notando que $OA = R$,

$$\boxed{l_{10} = \frac{R}{2}\left(\sqrt{5}-1\right).} \qquad (12)$$

238. **Semelhança dos polígonos regulares.** — *Dois polígonos regulares convexos com o mesmo número de lados são semelhantes, e a razão de semelhança é igual à razão dos perímetros, dos raios e dos apótemas* (teorema).

Sejam os polígonos regulares ABCDE e A'B'C'D'E', fig. a seguir.



Com efeito, os ângulos internos dos polígonos regulares de mesmo número de lados são iguais. Além disso, como os lados de um dêles são iguais entre si, e os lados do outro também o são, segue-se que os lados de ambos são proporcionais.

Demonstrada a primeira parte da proposição, temos que a razão de semelhança dos polígonos considerados é a mesma dos perímetros (n. 176). — Assim:

$$\frac{P}{P'}=\frac{AB}{A'B'}. \qquad (1)$$

Ademais, os triângulos isósceles AOB e A'O'B' são semelhantes, pois têm iguais os ângulos AOB e A'O'B', como ângulos cêntricos de polígonos regulares com o mesmo número de lados (n.º 216). — Logo:

$$\frac{OA}{O'A'}=\frac{AB}{A'B'}. \qquad (2)$$

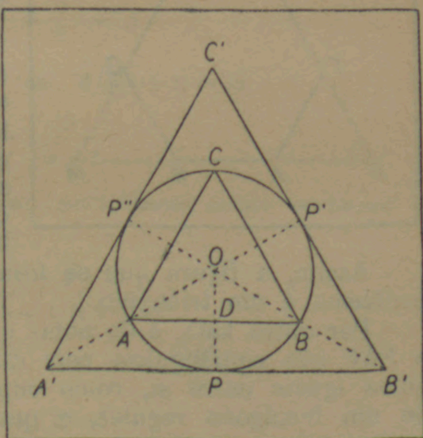
Finalmente, considerando os triângulos retângulos AFO e A'F'O', verifica-se também que são semelhantes, uma vez que são iguais os ângulos AOF e A'O'F', como metade de ângulos iguais. — Portanto:

$$\frac{OF}{O'F'}=\frac{OA}{O'A'}. \qquad (3)$$

Comparando as relações (1), (2) e (3), chega-se a que

$$\frac{P}{P'}=\frac{OA}{O'A'}=\frac{OF}{O'F'}=\frac{AB}{A'B'}.$$

239. **Problemas.** — 1.º *Exprimir o lado do triângulo circunscrito a um círculo em função do lado do triângulo regular inscrito.*



Seja AB o lado de um triângulo regular inscrito, figura ao lado.

Traçando o raio OP, perpendicular a AB, e depois, pelo ponto P, uma tangente à circunferência, o segmento desta, limitado pelo prolongamento dos raios, OA e OB, será o lado do triângulo regular circunscrito, A'B'.

Nos triângulos semelhantes OAB e OA′B′, temos

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OP}{OD}.$$

Notando que $OP = R$, e que OD é o apótema do triângulo regular inscrito, temos (n. 230).

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{R}{\frac{R}{2}}$$

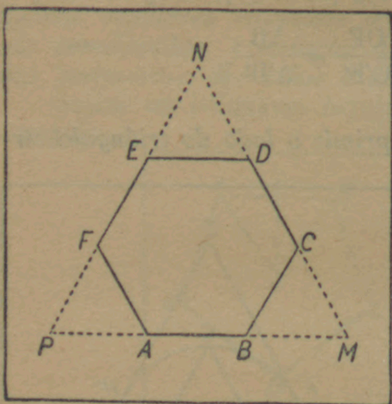
$$\frac{A'B'}{AB} = 2$$

$$A'B' = 2AB$$

ou, fazendo $A'B' = l'_3$ e $AB = l_3$,

$$l'_3 = 2l_3.$$

2.º *Dizer que polígono se obtém, prolongando, dois a dois, os lados não adjacentes de um hexágono regular, e exprimir o lado dêste em função do lado do primitivo.*



Seja ABCDEF o hexágono regular dado, figura ao lado.

Notando que os segmentos AB e DC não são paralelos, de vez que formam com BC ângulos internos do mesmo lado não suplementares, segue-se que os seus suportes são concorrentes. Analogamente, chega-se a que os suportes de AB e EF, bem como os de CD e FE também são concorrentes.

Assim, a figura que se forma segundo o enunciado do problema é um triângulo.

Por outro lado, é de notar que os triângulos BMC, EDN e PAF são eqüiângulos, pois cada um dêles tem dois ângulos iguais entre si, como suplemento do ângulo interno de um hexágono regular, e que são também iguais, uma vez que todos têm um lado igual, por definição de polígono regular.

Estabelecida a igualdade entre os triângulos BMC, EDN e PAF, chega-se a que

$$PM = MN = NP,$$

a saber, o triângulo formado é regular.

Considerando, agora, a igualdade

$$PA + AB + BM = PM,$$

em que

$$PA = AB = BM,$$

temos

$$PM = 3AB,$$

ou, designando PM por l' e AB por l,

$$l' = 3l.$$

240. **Exercício.** — *A soma dos apótemas de um hexágono regular e de um triângulo eqüilátero inscritos no mesmo círculo é 7,5 cm. Calcular o raio.*

Consideremos as expressões dos apótemas do hexágono regular e do triângulo eqüilátero em função do raio (ns. 230 e 231)

$$a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad a_3 = \frac{R}{2}.$$

Como a soma dêsses segmentos é 7,5 cm, temos

$$\frac{R\sqrt{3}}{2} + \frac{R}{2} = 7{,}5$$

$$R\sqrt{3} + R = 15 \quad \text{ou} \quad R(\sqrt{3} + 1) = 15$$

$$R = \frac{15}{\sqrt{3} + 1}.$$

Racionalizemos o denominador, multiplicando ambos os têrmos da fração supra pelo binômio $\sqrt{3} - 1$:

$$R = \frac{15(\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)}$$

$$R = \frac{15 \times 0{,}732}{3 - 1} \quad \text{ou} \quad R = \frac{10{,}98}{2}$$

$$R = 5{,}49 \text{ cm}.$$

241. Exercícios propostos.

1. Calcular o valor do ângulo cêntrico de um triângulo regular. R. 120°.
2. Calcular o valor do ângulo cêntrico de um pentágono regular convexo. R. 72°.
3. Calcular o valor do ângulo cêntrico de um pentágono regular estrelado. R. 144°.
4. Quantos lados tem um polígono regular cujo ângulo cêntrico mede 60°? R. 6.
5. Quantas espécies há de triângulos regulares? R. 1.
6. Quantas espécies há de pentágonos regulares? R. 2.
7. Quantas espécies há de octógonos regulares? R. 2.
8. Quantas espécies há de pentadecágonos regulares? R. 4.
9. Calcular o lado do quadrado inscrito num círculo de 5 m de raio. R. 7,07 m.
10. Calcular o perímetro do quadrado inscrito num círculo de 1,2 m de raio. R. 6,787 m.
11. Calcular o apótema do quadrado inscrito num círculo de 4,5 m de raio. R. 3,181 m.
12. Calcular o lado do triângulo inscrito num círculo de 2,7 m de raio. R. 4,676 m.
13. Calcular o perímetro do triângulo regular inscrito num círculo de 2,7 m de raio. R. 14,029 m.
14. Calcular o apótema do hexágono regular inscrito num círculo de 8,2 m de raio. R. 7,101 m.
15. Calcular o lado do octógono regular convexo inscrito num círculo de 1,6 m de raio. R. 1,224 m.
16. Calcular o lado do decágono regular convexo inscrito num círculo de 2,4 m de raio. R. 1,483 m.
17. O lado de um quadrado inscrito mede 5,5 m. Calcular o raio do círculo. R. 3,888 m.
18. O perímetro de um triângulo regular inscrito mede 1,8 m. Calcular o raio do círculo. R. 0,346 m.
19. O apótema de um quadrado inscrito mede 3 m. Calcular o raio do círculo. R. 4,242 m.
20. O apótema de um hexágono regular inscrito mede 1,2 m. Calcular o raio do círculo. R. 1,385 m.
21. O lado de um quadrado inscrito mede 4,5 m. Calcular o lado do triângulo regular inscrito no mesmo círculo. R. 5,511 m.
22. O lado de um triângulo regular inscrito mede 2,7 m. Calcular o lado do quadrado inscrito no mesmo círculo. R. 2,204 m.
23. O apótema de um triângulo regular inscrito mede 0,25 m. Calcular o perímetro do quadrado inscrito no mesmo círculo. R. 2,828 m.
24. O apótema de um hexágono regular inscrito mede 0,36 m. Calcular o perímetro do triângulo regular inscrito no mesmo círculo. R. 2,16 m.
25. O apótema de um hexágono regular inscrito mede 1,4 m. Calcular o lado do decágono regular convexo inscrito no mesmo círculo. R. 0,998 m.

26. O perímetro de um quadrado circunscrito é 48 m. Calcular o lado do quadrado inscrito no mesmo círculo. R. 8,484.

27. O perímetro de um triângulo regular circunscrito é 36 m. Calcular o lado do triângulo semelhante inscrito no mesmo círculo. R. 6 m.

28. O perímetro de um octógono regular convexo inscrito é 12 m. Calcular o lado do polígono semelhante circunscrito ao mesmo círculo. R. 1,629 m.

29. Calcular o apótema do triângulo regular inscrito, sabendo que o lado do quadrado circunscrito ao mesmo círculo mede 1,8 m. R. 0,45 m.

30. Calcular o apótema do hexágono regular inscrito, tendo em conta que o lado do triângulo regular circunscrito ao mesmo círculo mede 3,5 m. R. 0,875 m.

31. Calcular o apótema do quadrado inscrito, sabendo que o lado do hexágono regular circunscrito ao mesmo círculo mede 2,5 m. R. 1,53 m.

32. A diferença entre os perímetros dos triângulos regulares, circunscrito e inscrito no mesmo círculo, é 0,9 m. Calcular o raio do círculo. R. 0,173 m.

33. A diferença entre o lado de um triângulo eqüilátero e de um hexágono regular, inscritos no mesmo círculo, é 0,4 m. Calcular o raio do círculo. R. 0,546 m.

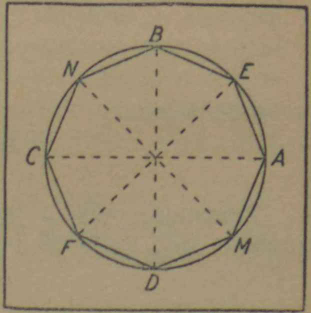
34. A soma dos apótemas de um triângulo regular e de um quadrado, inscritos no mesmo círculo, é 5 cm. Calcular o raio. R. 4,14 cm.

35. Estabelecer a expressão do lado do quadrado circunscrito em função do raio do círculo. R. $l' = 2R$.

36. Exprimir o lado do octógono regular convexo circunscrito a um círculo em função do lado do polígono semelhante inscrito. R. $l' = l\sqrt{2}$.

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

242. **Problema I.** — *Inscrever um octógono regular convexo em um círculo dado.*



O problema da inscrição de polígonos regulares no círculo reduz-se à divisão da circunferência em partes iguais.

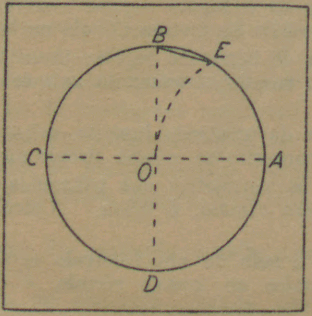
Assim, para resolver o problema proposto, devemos dividir a circunferência em 8 partes iguais.

Tracemos os diâmetros AC e BD, perpendiculares entre si; formam-se, dêsse modo, quatro ângulos retos.

Depois, tracemos as bissetrizes, EF e MN, dêsses ângulos e liguemos os pontos em que a circunferência ficou dividida.

O polígono obtido é um octógono regular convexo inscrito no círculo dado.

243. **Problema II.** — *Inscrever um dodecágono regular convexo em um círculo dado.*



No círculo dado, tracemos os diâmetros AC e BD, perpendiculares entre si; depois, com centro em A e com o raio AO, descrevamos o arco OE.

Temos

$$\widehat{BE} = \widehat{AB} - \widehat{AE}.$$

Notemos que o arco AB é igual a um quarto (n. 223) e que o arco AE é igual a um sexto (n. 227) da circunferência: Assim:

$$\widehat{BE} = \frac{C}{4} - \frac{C}{6}$$

$$\widehat{BE} = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right)C,$$

de onde tiramos

$$\widehat{BE} = \frac{1}{12} \text{ de } C.$$

Traçando, pois, a partir de B, doze cordas consecutivas iguais a BE, obtemos o polígono pedido.

Capítulo XIII

MEDIÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA

244. **Preliminares.** — Nas séries anteriores do nosso curso, depois de definir a igualdade e soma de segmentos retilíneos, tivemos oportunidade de examinar a questão da medida dêsses segmentos, bem como a das linhas poligonais.

Vimos, então, que a operação, nesses casos, não oferece em geral dificuldade, pois os elementos que se comparam podem ser decompostos em partes superponíveis.

Do mesmo modo, a medida de um arco de circunferência pode ser obtida diretamente, quando se toma para unidade outro arco do mesmo raio.

Entretanto, a comparação entre arco de circunferência e segmento retilíneo ou entre arcos de raios desiguais não pode ser feita diretamente uma vez que nenhuma parte de um dêles, por menor que se imagine, se adapta exatamente sôbre o outro.

Assim, para medir um arco de circunferência, deve-se, primeiramente, definir o seu comprimento, e depois referi-lo ao de um segmento retilíneo.

245. **Comprimento de um arco de círculo.** — *Comprimento de um arco de círculo* é o limite comum para o qual tendem os perímetros das linhas poligonais regulares convexas, inscritas e circunscritas ao arco, quando o número de lados aumenta indefinidamente, tendendo todos êles para zero (1).

Devemos notar que o comprimento de uma curva é sempre maior que o perímetro da linha poligonal regular convexa nela inscrita, e sempre menor que o perímetro da linha poligonal circunscrita.

Estendendo, à circunferência, a definição de comprimento

---

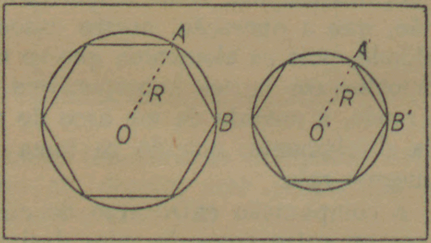
(1) A demonstração das proposições que justificam a definição não pode ser dada a esta altura do curso.

de arco, diz-se que o *comprimento de uma circunferência* é o limite comum para o qual tendem os perímetros dos polígonos regulares convexos, a ela inscritos e circunscritos, quando o número de lados aumenta indefinidamente.

Acrescentemos, ainda, que o comprimento de uma circunferência é maior que o perímetro de qualquer polígono regular convexo nela inscrito, e menor que o de qualquer polígono regular circunscrito.

246. **Teorema.** — *A razão de duas circunferências é igual à dos seus raios.*

Sejam O e O′ duas circunferências de raios R e R, figura abaixo.



Inscrevamos em ambas polígonos regulares do mesmo número de lados.

Sendo semelhantes êsses polígonos (n.º 238), temos, designando por nl e nl' os respectivos perímetros,

$$\frac{nl}{nl'} = \frac{R}{R'}.$$

Admitindo que o número n aumenta indefinidamente, os perímetros dos polígonos, nl e nl', têm para limites respectivos os comprimentos das circunferências, C e C′.

E, como a relação

$$\frac{nl}{nl'} = \frac{R}{R'}$$

é verdadeira para qualquer valor de n, subsiste, ainda, quando se substitui nl por C e nl' por C′. — Assim,

$$\frac{C}{C'} = \frac{R}{R'}.$$

247. Razão da circunferência para o diâmetro. — Da proposição estabelecida no parágrafo anterior decorre o corolário seguinte:

A razão da circunferência para o diâmetro é um número constante.

Consideremos a proporção

$$\frac{C}{C'} = \frac{R}{R'}.$$

Multiplicando os têrmos da segunda razão por 2, vem

$$\frac{C}{C'} = \frac{2R}{2R'},$$

de onde se deduz

$$\frac{C}{2R} = \frac{C'}{2R'}.$$

Assim, a razão da circunferência para o diâmetro é a mesma em todos os círculos.

248. Expressão do comprimento da circunferência. — A razão da circunferência para o diâmetro representa-se pela letra grega π (pi).

Temos, assim,

$$\frac{C}{2R} = \pi,$$

de onde se deduz

$$\boxed{C = 2\pi R}$$

O comprimento da circunferência é igual ao produto do diâmetro pelo número π.

249. O número π. — O número π é *irracional*. Assim, só se podem obter valores aproximados dêsse notável número.

Expresso sob forma de número decimal, o seu valor aproximado é o seguinte:

$$\pi = 3{,}141\,592\,653\,589\ldots$$

Nos cálculos que não exigem grande aproximação, costuma-se tomar

$$\pi = 3{,}141\,6,$$

ou, simplesmente,

$$\pi = 3{,}14.$$

250. **Cálculo de π.** — Há vários métodos empregados no cálculo dos valores aproximados do número π, entre os quais se contam o dos perímetros, devido a Arquimedes, e o dos isoperímetros.

Examinemos o primeiro dos métodos citados.

251. **Método dos perímetros.** — Consideremos a fórmula

$$\pi = \frac{C}{2R}.$$

Admitindo o raio igual à unidade, vem

$$\pi = \frac{C}{2}.$$

Assim, o cálculo de π, pelo método de que nos ocupamos, reduz-se ao cálculo do comprimento da semicircunferência de raio igual à unidade.

Conforme a definição de comprimento de uma circunferência, os perímetros dos polígonos regulares inscritos e circunscritos são valores aproximados de C, os primeiros por falta e os últimos por excesso, aproximação essa que aumenta quando cresce o número de lados dos polígonos considerados.

Portanto, se calcularmos, a partir de um polígono regular inscrito na circunferência, os perímetros dos polígonos que se obtêm, duplicando sucessivamente o número de lados do anterior, iremos obtendo valores cada vez mais aproximados para C, e, conseqüentemente, para π.

Ademais, notemos que, em cada caso, o valor de π estará compreendido entre os semiperímetros dos polígonos regulares inscrito e circunscrito à circunferência.

Indiquemos a maneira de obter êsses valores.

Partindo da expressão do lado do quadrado inscrito, e admitindo sempre $R = 1$, iremos obtendo, pela aplicação sucessiva da fórmula

$$l_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - l^2_n}},$$

os lados dos polígonos regulares inscritos de 8, 16, 32, 64... lados, a saber,

$$l_4 = \sqrt{2} = 1{,}414\,21\ldots$$

$$l_8 = \sqrt{2 - \sqrt{2}} = 0{,}765\,36\ldots$$

$$l_{16} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} = 0{,}390\,18$$

$$l_{32} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} = 0{,}196\,03\ldots$$

$$l_{64} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}} = 0{,}098\,135\ldots,$$

e assim por diante.

Conhecidos os valores aproximados dos lados, calculam-se imediatamente os semiperímetros dêsses polígonos:

$$p_4 = 2 \times 1{,}414\,21\ldots = 2{,}828\,42\ldots$$
$$p_8 = 4 \times 0{,}765\,36\ldots = 3{,}061\,44\ldots$$
$$p_{16} = 8 \times 0{,}390\,18\ldots = 3{,}121\,44\ldots$$
$$p_{32} = 16 \times 0{,}196\,03\ldots = 3{,}136\,48\ldots$$
$$p_{64} = 32 \times 0{,}098\,13\ldots = 3{,}140\,16\ldots$$

obtendo-se, assim, valores aproximados do número π.

Por outro lado, se calculássemos, com auxílio da fórmula

$$l' = \frac{2lR}{\sqrt{4R^2 - l^2}},$$

o lado de cada um dos polígonos circunscritos, semelhantes aos considerados, e depois os semiperímetros correspondentes, chegaríamos a que o número π estaria compreendido, em cada caso, entre os semiperímetros dos polígonos inscrito e circunscrito.

252. **Natureza do número** π. — A relação entre a circunferência e o diâmetro tem sido considerada desde a mais remota antiguidade. Assim é que já se encontram referências a respeito em documentos atribuídos ao ano 2 000 a. C.

Entretanto, a solução do problema foi iniciada, muito mais tarde, por Arquimedes, nascido em Siracusa no ano 287 a. C., quando estabeleceu a dupla desigualdade:

$$3\frac{1}{7} > \pi > 3\frac{10}{71}.$$

O valor encontrado por Arquimedes:

$$\frac{22}{7}$$

aproxima-se do número π por excesso, correspondendo a

$$3{,}142\,8\ldots$$

Em épocas mais recentes, calcularam-se valores para o número π com aproximações sempre crescentes, chegando-se até a um número decimal com 700 algarismos.

Os trabalhos mais importantes sôbre a natureza do número π são devidos a Lambert e Lindemann, tendo o primeiro demonstrado, em 1770, que π é número *irracional*, e o último, em 1882, que o número π pertence à classe dos *números irracionais transcendentes*.

253. O inverso do número π. — Nas aplicações práticas, quando se apresenta a oportunidade de dividir qualquer número por π é preferível multiplicar o dividendo pelo inverso de π.

O valor aproximado do inverso do número π é o seguinte:

$$\frac{1}{\pi} = 0{,}318\,309\,886\,1\ldots$$

Nos cálculos que não exigem grande aproximação, costuma-se tomar

$$\frac{1}{\pi} = 0{,}318.$$

254. Comprimento de um arco de circunferência. — Partindo da fórmula

$$C = 2\pi R,$$

e notando que a circunferência tem 360 graus, segue-se que o comprimento do arco de 1° é dado pela relação

$$\frac{2\pi R}{360},$$

e o do arco de n graus,

$$l = \frac{2\pi Rn}{360},$$

ou, simplificando,

$$\boxed{l = \frac{\pi Rn}{180}.} \qquad (1)$$

Anàlogamente, para um arco de n' minutos e n'' segundos, temos

$$l' = \frac{2\pi Rn'}{360 \times 60} \quad \text{e} \quad l'' = \frac{2\pi Rn''}{360 \times 60 \times 60},$$

ou, simplificando e efetuando,

$$l' = \frac{\pi Rn'}{10\,800} \quad \text{e} \quad l'' = \frac{\pi Rn''}{648\,000}. \qquad (2)$$

Combinando as fórmulas (1) e (2), podemos estabelecer a expressão do comprimento de um arco dado em graus, minutos e segundos.

Com efeito, designando por l êsse arco, temos

$$l = \frac{2\pi Rn}{360} + \frac{2\pi Rn'}{360 \times 60} + \frac{2\pi Rn''}{360 \times 60 \times 60},$$

ou, colocando em evidência o fator comum

$$\frac{2\pi R}{360}$$

$$l = \frac{2\pi R}{360}\left(n + \frac{n'}{60} + \frac{n''}{3\,600}\right)$$

ou, simplificando,

$$l = \frac{\pi R}{180}\left(n + \frac{n'}{60} + \frac{n''}{3\,600}\right). \qquad (3)$$

255. **Exercícios.** — 1.º *Calcular o comprimento do arco de 18º em uma circunferência de 5 cm de raio.*

Aplicando a fórmula (1)

$$l = \frac{\pi Rn}{180},$$

encontramos

$$l = \frac{3{,}14 \times 5 \times 18}{180}$$

$$R = 1{,}57 \text{ cm.}$$

2.º *Calcular o raio de uma circunferência na qual o arco de 12º tem um comprimento de 1,5 cm.*

Da expressão (1)

$$l = \frac{\pi R n}{180}$$

deduz-se imediatamente

$$\pi R n = 180 l$$

$$R = \frac{180}{n} \times \frac{l}{\pi}.$$

Fazendo as substituições, vem

$$R = \frac{180 \times 1{,}5}{12} \times 0{,}318$$

$$R = 7{,}155 \text{ cm.}$$

3.º *Calcular o comprimento do arco de 22º15'24" em uma circunferência de 15 cm de raio.*

Aplicando a fórmula (3)

$$l = \frac{\pi R}{180}\left(n + \frac{n'}{60} + \frac{n''}{3\,600}\right),$$

encontramos

$$l = \frac{3{,}14 \times 15}{180}\left(22 + \frac{15}{60} + \frac{24}{3\,600}\right)$$

$$l = 5{,}82 \text{ cm.}$$

256. **O radiano.** — Dá-se a denominação de *radiano* ao ângulo central que intercepta um arco igual ao raio.

Vejamos que o radiano é um ângulo constante, e independente do raio do círculo.

Consideremos a relação conhecida (n.º 254)

$$l = \frac{\pi R n}{180},$$

que exprime o comprimento de um arco em função do raio do círculo e do ângulo correspondente.

Admitindo $l = R$, temos

$$R = \frac{\pi R n}{180}$$

$$\pi R n = 180R \quad \text{ou} \quad \pi n = 180$$

$$n = \frac{180}{\pi}$$

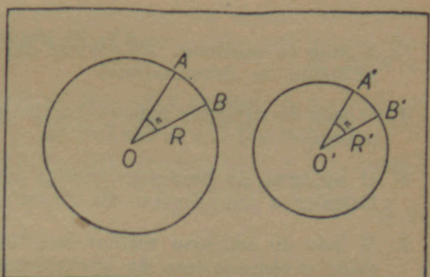
$$n = 180 \times \frac{1}{\pi}.$$

Para calcular o valor do radiano, basta substituir, na fórmula acima, o inverso do número π pelo seu valor aproximado, 0,318 31. — Chega-se, assim, a que

$$n = 57^\circ 17' 44'',8 \ldots$$

257. **Arcos semelhantes.** — Dá-se a denominação de *arcos semelhantes* aos arcos que, pertencendo a circunferências distintas, correspondem a ângulos centrais iguais.

258. **Teorema.** — *Dois arcos semelhantes estão entre si como os seus raios.*



Sejam AB e A'B' dois arcos semelhantes, tomados nas circunferências de raios R e R'.

Designando por n a medida comum dos ângulos centrais correspondentes a êsses arcos, e por l e l' os respectivos comprimentos, temos (n.º 254)

$$l = \frac{\pi R n}{180} \quad \text{e} \quad l' = \frac{\pi R' n}{180}.$$

Dividindo ordenadamente as expressões acima, vem

$$\frac{l}{l'} = \frac{\dfrac{\pi R n}{180}}{\dfrac{\pi R' n}{180}}$$

ou, simplificando,

$$\frac{l}{l'} = \frac{R}{R'}.$$

259. **Exercício.** — *Dois arcos semelhantes medem, respectivamente, 12 cm e 18 cm; se o raio do primeiro mede 2,4 cm, quanto mede o raio do segundo?*

Aplicando a relação

$$\frac{l}{l'} = \frac{R}{R'},$$

encontramos

$$\frac{12}{18} = \frac{2,4}{R'}$$

$$R' = \frac{18 \times 2,4}{12}$$

$$R' = 3,6 \text{ cm}.$$

260. **Exercícios propostos.**

1. Calcular o comprimento da circunferência que tem 4,8 m de raio. R. 30,144 m.

2. O comprimento de uma circunferência é de 12 m. Calcular o raio R. 1,908 m.

3. O lado do quadrado inscrito em um círculo mede 3 m. Calcular o comprimento da circunferência. R. 13,319 m.

4. O lado do triângulo regular inscrito em um círculo mede 5,2 m. Calcular o comprimento da circunferência. R. 18,852 m.

5. O apótema do hexágono regular inscrito em um círculo mede 3,6 m. Calcular o comprimento da circunferência. R. 26,104 m.

6. O lado do octógono regular inscrito em um círculo mede 7,2 m. Calcular o comprimento da circunferência. R. 59,095 m.

7. A altura de um triângulo regular inscrito mede 2,1 m. Calcular o comprimento da circunferência. R. 8,792 m.

8. O comprimento de uma circunferência é de 1,2 m. Calcular o perímetro do quadrado nela inscrito. R. 1,079 m.

9. O comprimento de uma circunferência é de 2,5 m. Calcular o perímetro do triângulo regular nela inscrita. R. 2,068 m.

10. O comprimento de uma circunferência é de 3,2 m. Calcular o apótema do hexágono regular nela inscrito. R. 0,44 m.

11. O comprimento de uma circunferência é de 1,48 m. Calcular a altura do triângulo regular nela inscrito. R. 0,352 m.

12. O perímetro do quadrado circunscrito a um círculo mede 10 m. Calcular o comprimento da circunferência. R. 7,85 m.

13. O perímetro do triângulo regular circunscrito a um círculo mede 15 m. Calcular o comprimento da circunferência. R. 9,062 m.

14. O raio de uma circunferência mede 8 m. Calcular o comprimento de um arco de 12°. R. 1,674 m.

15. O diâmetro de uma circunferência mede 3,6 m. Calcular o comprimento de um arco de 7°30′. R. 0,235 m.

16. Em uma circunferência, o comprimento do arco de 30° é 20 m. Calcular o raio. R. 38,216 m.

17. Em uma circunferência, o comprimento do arco de 18°20′32″ é 0,05 m. Calcular o diâmetro. R. 0,31 m.

18. O raio de uma circunferência mede 12 m. Calcular o comprimento do arco interceptado por um ângulo inscrito de 15°. R. 6,28 m.

19. Calcular o raio da circunferência, em que o comprimento do arco interceptado por um ângulo inscrito de 24° é de 6 m. R. 7,165 m.

20. A diferença entre os comprimentos de duas circunferências é de 25,12 m. Calcular os respectivos raios, tendo em conta que a soma de ambos é 10 m. R. 7 e 3 m.

21. A soma dos comprimentos de duas circunferências é 75,36 m. Calcular os respectivos raios, sabendo que a diferença entre ambos é de 2 m. R. 7 e 5 m.

22. Calcular a diferença entre os comprimentos das circunferências circunscrita e inscrita a um hexágono regular, cujo perímetro mede 15 m. R. 2,424 m.

23. A diferença entre o comprimento de uma circunferência e o perímetro do quadrado nela inscrito é de 6 m. Calcular o raio. R. 9,615 m.

24. A diferença entre o comprimento de uma circunferência e o perímetro do triângulo regular nela inscrito é 1,626 m. Calcular o raio. R. 1,5 m.

CAPÍTULO XIV

ÁREAS PLANAS

261. **Definições.** — Dá-se a denominação de *área* à medida de uma porção de superfície.

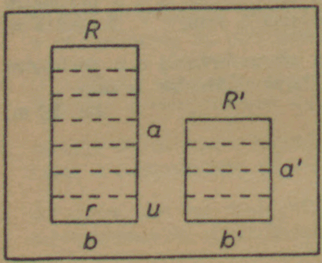
Duas figuras dizem-se *equivalentes* quando têm a mesma área.

Como sabemos, as superfícies de duas figuras iguais podem coincidir por superposição; assim, conforme a definição de área, duas figuras iguais têm a mesma área, isto é, são equivalentes.

Diz-se que uma superfície S é igual à soma de duas ou mais outras, A, B, C,... quando S pode ser decomposta em partes respectivamente equivalentes a A, B, C,...

Recordemos, ademais, que a *unidade de área* é a área do quadrado cujo lado é a unidade de comprimento.

262. **Teorema.** — *As áreas de dois retângulos que têm a mesma base estão entre si como as suas alturas.*



Consideremos os retângulos R e R', figura ao lado, cujas bases e alturas guardam as relações seguintes:

$$b = b', \quad a \neq a'.$$

Admitamos que a e a' sejam comensuráveis, e que a medida comum, u, esteja contida 7 vêzes em a e 4 vêzes em a'. — Temos, assim,

$$a = 7u$$

$$a' = 4u.$$

Dividindo membro a membro essas igualdades, vem

$$\frac{a}{a'} = \frac{7}{4}. \qquad (1)$$

Se, pelos pontos de divisão, traçarmos paralelas às bases, os dois retângulos ficarão respectivamente divididos em 7 e 4 retângulos iguais entre si, uma vez que todos têm bases e alturas iguais.

Considerando um dêsses retângulos, r, como unidade de área, vem

$$R = 7r$$

$$R' = 4r,$$

de onde deduzimos

$$\frac{R}{R'} = \frac{7}{4}. \qquad (2)$$

Comparando as relações (1) e (2), temos

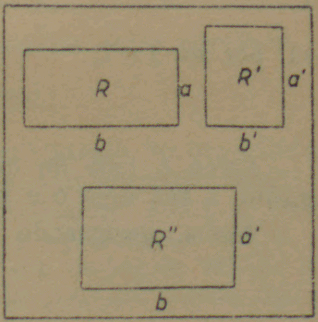
$$\frac{R}{R'} = \frac{a}{a'}.$$

Por outro lado, demonstra-se que a proposição subsiste no caso das alturas serem incomensuráveis.

263. **Observação.** — Se considerarmos a e a' como bases, os retângulos R e R′ terão a mesma altura, b. — Assim:

As áreas de dois retângulos que têm a mesma altura estão entre si como as suas bases.

264. **Teorema.** — *As áreas de dois retângulos quaisquer estão entre si como os produtos das bases pelas alturas.*



Sejam os retângulos R e R′, figura ao lado, tendo por bases e alturas b e a e b' e a', respectivamente.

Construamos um terceiro retângulo que tenha como base a do primeiro, b, e como altura a do segundo, a'.

Comparando os retângulos R e R″, temos, de acôrdo com a proposição estabelecida no parágrafo 262,

$$\frac{R}{R''} = \frac{a}{a'}. \qquad (1)$$

Por outro lado, comparando os retângulos R″ e R′, temos também

$$\frac{R''}{R'} = \frac{b}{b'}. \qquad (2)$$

Multiplicando ordenadamente as igualdades (1) e (2), vem

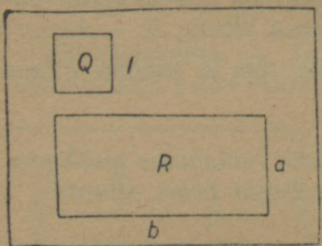
$$\frac{RR''}{R'R''} = \frac{ab}{a'b'}.$$

Simplificando, temos

$$\frac{R}{R'} = \frac{ab}{a'b'}.$$

MEDIÇÃO DAS ÁREAS DAS PRINCIPAIS FIGURAS PLANAS

265. **Área do retângulo.** — *A área de um retângulo tem por medida o produto dos números que exprimem a medida de sua base e de sua altura.*



Consideremos o retângulo R, cujas dimensões são b, e a, e o quadrado Q, cujo lado l, é a unidade de comprimento.

De acôrdo com o teorema anterior (n. 264) temos

$$\frac{R}{Q} = \frac{ab}{l \times l}$$

ou, por ser $l = 1$,

$$\frac{R}{Q} = ab.$$

Como o lado do quadrado, l, é a unidade de comprimento, a sua área é a unidade de superfície.

Assim, designando por S a área do retângulo, temos

$$S = \frac{R}{Q},$$

$$\boxed{S = ab,} \qquad (1)$$

em que a e b representam os números que exprimem a medida das dimensões do retângulo, referidas à mesma unidade.

Abreviadamente, costuma-se dizer que *a área de um retângulo é igual ao produto da base pela altura.*

266. Área do quadrado. — *A área do quadrado tem por medida o quadrado do número que exprime a medida do seu lado.*

Com efeito, sendo o quadrado um retângulo que tem os quatro lados iguais, segue-se, designando por l o seu lado, que

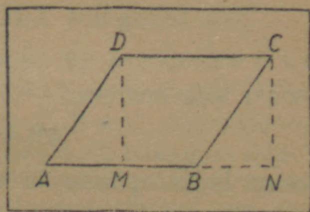
$$S = l \times l,$$

ou, efetuando,

$$\boxed{S = l^2} \qquad (2)$$

267. Área do paralelogramo. — *A área de um paralelogramo tem por medida o produto dos números que exprimem a medida de sua base e de sua altura.*

Seja o paralelogramo ABCD, figura ao lado.



Pelos vértices C e D, tracemos CN e DM perpendiculares a AB.

Formam-se, dêsse modo, os triângulos retângulos AMD e BNC, nos quais

$$AD = BC,$$

como lados opostos de um paralelogramo,

$$DM = CN,$$

como segmentos paralelos compreendidos entre paralelas. — Logo:

$$\Delta\, AMD = \Delta\, BNC.$$

Por outro lado, notemos que, subtraindo do quadrilátero ANCD o triângulo BNC, obtemos o paralelogramo ABCD, e bem assim que, subtraindo do quadrilátero ANCD o triângulo AMD, a figura que se obtém é o retângulo MNCD.

Como o paralelogramo ABCD e o retângulo MNCD são equivalentes, segue-se que a área de qualquer dessas figuras é dada pelo produto

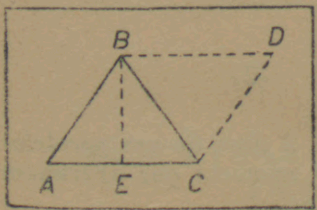
$$AB \times MD.$$

Assim, designando AB por b, MD por h e a área do paralelogramo por S, temos

$$\boxed{S = bh} \qquad (3)$$

268. **Corolário**· — *Os paralelogramos de mesma base e mesma altura são equivalentes.*

269. **Área do triângulo.** — *A área de um triângulo tem por medida o semiproduto dos números que exprimem a medida de sua base e de sua altura.*



Seja o triângulo ABC, figura ao lado.

Pelos vértices B e C, tracemos BD e CD respectivamente paralelas aos lados AC e AB do triângulo.

Forma-se, assim, o paralelogramo ABDC, da mesma base e altura que o triângulo ABC.

Nos triângulos ABC e CBD, temos

$$BC = BC,$$

como lado comum,

$$AB = CD \quad e \quad AC = BD,$$

como lados opostos de um paralelogramo.

São, pois, iguais êsses triângulos. Assim, a área do triângulo ABC é a metade da área do paralelogramo ABDC. — E, como esta última é dada por

$$AC \times BE,$$

segue-se que a área do triângulo equivale a

$$\frac{AC \times BE}{2}.$$

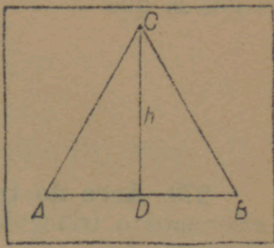
Designando AC por b, BE por h e a área da figura por S, temos

$$\boxed{S = \frac{bh}{2}.} \qquad (4)$$

270. **Corolário.** — *Dois triângulos que têm a mesma base e a mesma altura são equivalentes.*

271. Área do triângulo eqüilátero. — Consideremos o triângulo eqüilátero ABC, figura ao lado.

Designando por h a altura e por l o lado, temos (n. 193)



$$h=\frac{l\sqrt{3}}{2}.$$

Substituindo, na expressão (n. 269)

$$S=\frac{bh}{2},$$

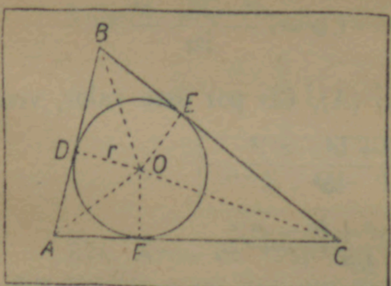
b por l e h pelo valor dado acima, temos

$$S=\frac{1}{2}\times l\times\frac{l\sqrt{3}}{2},$$

$$\boxed{S=\frac{l^2\sqrt{3}}{4}.} \qquad (5)$$

272. Área do triângulo em função do perímetro e do raio do círculo inscrito. — Consideremos o triângulo ABC.

Traçando as bissetrizes dos ângulos A, B e C, inscrevamos um círculo no triângulo dado.



O triângulo ABC fica, assim, decomposto em três outros, AOB, AOC e BOC.

Mas, por definição, temos que a área do triângulo ABC é igual à soma das áreas dos triângulos parciais.

Assim, designando por a, b e c, os lados do triângulo, por S a sua área, e notando que o raio do círculo inscrito é a altura comum dos triângulos parciais, temos

$$S=\frac{ar}{2}+\frac{br}{2}+\frac{cr}{2},$$

$$S=\frac{r}{2}(a+b+c).$$

Designando por $2p$ o perímetro do triângulo, a saber,

$$a+b+c=2p,$$

segue-se que

$$S=\frac{r}{2}\times 2p,$$

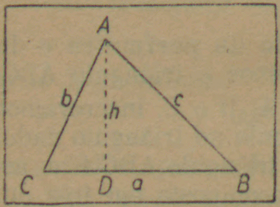
$$\boxed{S=pr.} \qquad (6)$$

273. Área do triângulo em função dos lados. — Consideremos o triângulo ABC, figura a seguir, e seja h a sua altura.

No triângulo retângulo ACD, temos

$$h^2=b^2-\overline{CD}^2. \qquad (A)$$

Como, em qualquer triângulo, o quadrado do lado oposto a um ângulo agudo é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos o duplo produto de um dêstes pela projeção do outro sôbre êle, temos



$$c^2=a^2+b^2-2a\,.\,CD,$$

de onde se deduz

$$2a\,.\,CD=a^2+b^2-c^2,$$

$$CD=\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}.$$

Substituindo, na expressão (A), CD por êsse valor, vem

$$h^2=b^2-\frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2},$$

$$h^2=\frac{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2},$$

$$h^2=\frac{(2ab+a^2+b^2-c^2)\,(2ab-a^2-b^2+c^2)}{4a^2},$$

$$h^2=\frac{[(a+b)^2-c^2]\,[c^2-(a-b)^2]}{4a^2},$$

$$h^2=\frac{(a+b+c)\,(a+b-c)\,(c+a-b)\,(c-a+b)}{4a^2}. \qquad (B)$$

Fazendo

$$a+b+c=2p,$$

temos, sucessivamente,

$$a+b-c=2(p-c),$$
$$c+a-b=2(p-b),$$
$$c-a+b=2(p-a).$$

Substituindo êsses valores na expressão (B), vem

$$h^2=\frac{16p(p-a)(p-b)(p-c)}{4a^2},$$

$$h^2=\frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2},$$

$$h=\frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a},$$

$$h=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \qquad \text{(C)}$$

Consideremos, agora, a expressão da área do triângulo ABC,

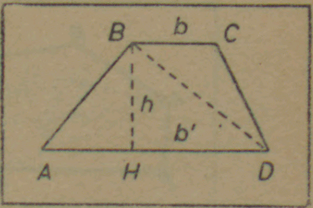
$$S=\frac{a}{2}\cdot h.$$

Substituindo h pelo valor obtido em (C), temos

$$S=\frac{a}{2}\cdot\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$\boxed{S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.} \qquad (7)$$

274. **Área do trapézio.** — *A área de um trapézio tem por medida o produto dos números que exprimem a medida da semi-soma das bases e da altura.*



Consideremos o trapézio ABCD, figura ao lado.

Traçando a diagonal BD, decompomos o trapézio em dois triângulos, ABD e BCD, cujas áreas são dadas pelas expressões

$$\frac{AD \times BH}{2} \quad \text{e} \quad \frac{BC \times BH}{2}.$$

Designando por S a área do trapézio, vem

$$S = \frac{AD \times BH}{2} + \frac{BC \times BH}{2},$$

$$S = \frac{AD + BC}{2} \times BH. \qquad (8)$$

Chamando b e b' as bases do trapézio, temos, pois

$$\boxed{S = \frac{(b + b')\,h}{2}.} \qquad (9)$$

275. **Observação.** — Recordemos que a semi-soma das bases de um trapézio é igual à sua base média:

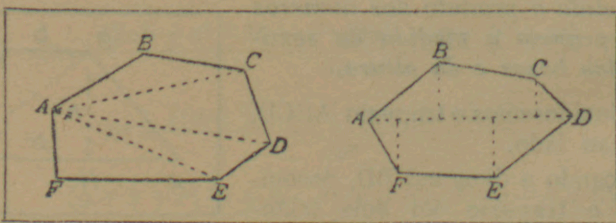
$$b'' = \frac{b + b'}{2}.$$

Substituindo êsse valor na fórmula (8), temos

$$S = b''h,$$

expressão da área de um trapézio em função da base média e da altura.

276. **Área de um polígono qualquer.** — Tomando tôdas as diagonais que partem de um dos vértices, decompõe-se o polígono em triângulos, cujas áreas se calculam. Somando essas áreas, obtém-se a do polígono considerado.



Por outro lado, pode-se decompor o polígono em triângulos, retângulos e trapézios, tomando-lhe a maior diagonal e baixando sôbre ela perpendiculares, a partir dos demais vértices. A soma das áreas das figuras assim formadas é igual à área do polígono.

277. **Área dos polígonos regulares convexos.** — *A área de um polígono regular convexo tem por medida o semi-produto dos números que exprimem a medida do seu perímetro e seu apótema.*

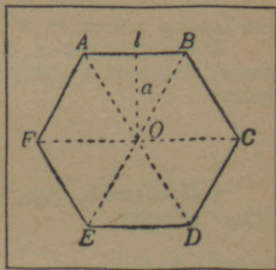
Seja ABCD... um polígono regular convexo de n lados. Traçando todos os raios do polígono, formam-se n triângulos iguais, cujas áreas, somadas, perfazem a do polígono.

A área de cada triângulo é dada pela expressão

$$\frac{1}{2}\,l\times a,$$

em que l representa o lado do polígono e a o seu apótema

Assim, designando por S a área do polígono, temos



$$\mathrm{S}=n\times\frac{1}{2}\,l\times a.$$

Mas, notando que nl é o perímetro do polígono:

$$nl=2p,$$

segue-se que

$$\boxed{\mathrm{S}=pa.}$$

278. **Áreas de alguns polígonos regulares.** — Damos a seguir as expressões das áreas de alguns polígonos regulares em função do lado e em função do raio.

I. *Área do triângulo eqüilátero:*

$$\mathrm{S}=\frac{l^2\sqrt{3}}{4} \quad \text{e} \quad \mathrm{S}=\frac{3\mathrm{R}^2\sqrt{3}}{4}.$$

II. *Área do quadrado:*

$$\mathrm{S}=l^2 \quad \text{e} \quad \mathrm{S}=2\mathrm{R}^2.$$

III. *Área do pentágono:*

$$S = \frac{l^2}{4}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} \quad \text{e} \quad S = \frac{5R^2}{8}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

IV. *Área do hexágono:*

$$S = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad S = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}.$$

V. *Área do octógono:*

$$S = 2l^2\left(\sqrt{2} + 1\right) \quad \text{e} \quad S = 2R^2\sqrt{2}.$$

279. **Exercícios.** — 1.º *Calcular a área de um triângulo retângulo cuja hipotenusa mede 50 cm e um dos catêtos, 14 cm.*

Consideremos a fórmula

$$S = \frac{bh}{2}$$

que fornece a área de um triângulo em função da base e altura.

Designando por a, b e c os lados do triângulo retângulo, e notando que um dos catêtos pode ser considerado como base e o outro como altura, temos

$$S = \frac{bc}{2}. \qquad (1)$$

Calculemos, pois, o segundo catêto do triângulo, aplicando a relação conhecida

$$a^2 = b^2 + c^2$$

de onde se tira

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

Fazendo as substituições, vem

$$c^2 = 50^2 - 14^2$$
$$c^2 = 2\,304$$
$$c = 48 \text{ cm}.$$

Substituindo, na fórmula (1), b e c por seu valores, vem

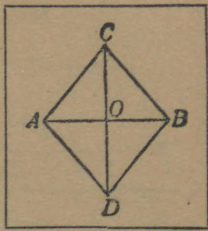
$$S = \frac{14 \times 48}{2}$$

$$S = 336 \text{ cm}^2.$$

2.º *A soma das diagonais de um losango é igual a 40 cm e a diferença entre a maior e a menor é de 10 cm. Calcular a área dêsse losango.*

Designando por d e d' as diagonais do losango, temos

$$d + d' = 40$$
$$d - d' = 10.$$



Resolvendo êsse sistema de equações, encontramos

$$2d = 50$$
$$d = 25 \text{ cm}$$
$$d' = 40 - 25$$
$$d' = 15 \text{ cm}.$$

Procuremos, agora, estabelecer a expressão da área do losango em função das diagonais.

Considerando a área do losango como a soma das áreas dos triângulos ABC e ABD, temos

$$S = \frac{AB \times OC}{2} + \frac{AB \times OD}{2}.$$

Mas, notando que

$$AB = d \quad \text{e} \quad OC = OD = \frac{d'}{2}$$

segue-se que

$$S = \frac{d \times \frac{d'}{2}}{2} + \frac{d \times \frac{d'}{2}}{2}$$

$$S = \frac{dd'}{4} + \frac{dd'}{4}$$

$$S = \frac{2dd'}{4}$$

$$S = \frac{dd'}{2}.$$

Fazendo as substituições, vem

$$S = \frac{25 \times 15}{2}$$

$$S = 187{,}50 \text{ cm}^2.$$

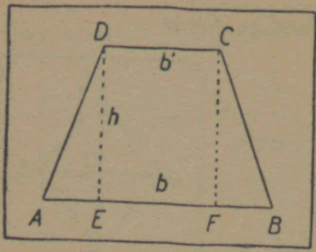
3.º *Os lados iguais de um trapézio isóscele medem 17 cm. e as bases 26 cm e 10 cm, respectivamente. Calcular a área dêsse quadrilátero.*

Calculemos a altura do trapézio dado.

Traçando, pelos vértices D e C, perpendiculares às bases, formam-se dois triângulos iguais, AED e BFC. No primeiro dêsses triângulos, temos

$$h^2 = \overline{AD}^2 - \overline{AE}^2$$

$$h^2 = 17^2 - \overline{AE}^2. \qquad (1)$$



Calculemos o valor de AE.

Conforme a figura:

$$AE = AB - EF - FB$$

ou, notando que $AE = FB$,

$$2AE = AB - EF$$

$$2AE = b - b'$$

$$AE = \frac{b - b'}{2} \quad \text{ou} \quad AE = \frac{26 - 10}{2}$$

$$AE = 8 \text{ cm.}$$

Substituindo AE por seu valor na expressão (1), vem

$$h^2 = 17^2 - 8^2 \quad \text{ou} \quad h^2 = 225$$

$$h = 15 \text{ cm.}$$

Aplicando a fórmula (n. 274)

$$S = \frac{b + b'}{2} \cdot h$$

encontramos

$$S = \frac{26 + 10}{2} \cdot 15$$

$$S = 270 \text{ cm}^2.$$

280. **Exercícios propostos.**

1. A base de um triângulo é 2,4 cm e sua altura 1,8 cm. Calcular a área.
R. 2,16 cm².
2. A área de um triângulo é 15 cm² e sua altura 2,5 cm. Calcular a base.
R. 12 cm.
3. Calcular a altura de um triângulo cuja área é 10,50 cm² e cuja base mede 7 cm.
R. 3 cm.
4. Os catêtos de um triângulo retângulo são 6 cm e 8 cm. Calcular a área.
R. 24 cm².
5. Em um triângulo retângulo, a hipotenusa mede 2 m e um dos catêtos 1,6 m. Calcular a área.
R. 0,96 m².
6. A hipotenusa de um triângulo retângulo isóscele mede 10 m. Calcular a área.
R. 25 m².
7. A altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo isóscele mede 4 cm. Calcular a área.
R. 16 cm².
8. Calcular os catêtos de um triângulo retângulo cuja área mede 24 cm² e cuja hipotenusa mede 10 cm.
R. 6 cm e 8 cm.
9. Calcular a área do triângulo eqüilátero cujo lado mede 12 cm.
R. 62,35 cm².
10. O perímetro de um triângulo eqüilátero é 1,5 m. Calcular a área.
R. 0,108 2 m².
11. A altura de um triângulo eqüilátero é 2,4 m. Calcular a área.
R. 3,325 4 m².

12. A área de um triângulo eqüilátero é $7{,}20\ m^2$. Calcular o lado.
R. 4,07 m.

13. A área de um triângulo eqüilátero é $12{,}25\ m^2$. Calcular a altura.
R. 4,598 m.

14. O perímetro de um triângulo isóscele é 12,6 m. Medindo a base 4,8 m, calcular a área. R. $7{,}377\,6\ m^2$.

15. Os lados do triângulo ABC são $a = 12$ cm, $b = 13$ cm e $c = 14$ cm. Calcular sua área. R. $72{,}30\ cm^2$.

16. O perímetro de um quadrado é 14 cm. Calcular sua área.
R. $12{,}25\ cm^2$.

17. Calcular a área do quadrado cuja diagonal mede 1,6 m. R. $1{,}28\ m^2$.

18. A área de um quadrado é $1{,}44\ m^2$. Calcular a diagonal. R. 1,697 m.

19. Calcular a altura de um retângulo cuja área é igual a $4{,}16\ m^2$ e cuja base mede 3,2 m. R. 1,3 m.

20. Calcular a área do retângulo, cuja diagonal mede 3 m e cuja base mede 2,4 m. R. $4{,}32\ m^2$.

21. O perímetro de um retângulo é 8,2 m e um dos seus lados mede 2,7 m. Calcular a área. R. $3{,}78\ m^2$.

22. O perímetro de um retângulo é 24 m. Calcular sua área, tendo em conta que a base é igual ao dôbro da altura. R. $32\ m^2$.

23. O perímetro de um retângulo é 24,6 cm e a área é $32{,}76\ cm^2$. Calcular suas dimensões. R. 8,4 cm e 3,9 cm.

24. A área de um paralelogramo é $0{,}27\ m^2$. Calcular a base e a altura, sabendo que aquela é igual ao triplo desta. R. 0,9 m e 0,3 m.

25. As diagonais de um losango medem, respectivamente, 3 e 8 centímetros. Calcular sua área. R. $12\ cm^2$.

26. O perímetro de um losango é 2,4 m e uma das suas diagonais mede 0,6 m. Calcular a área. R. $0{,}311\,4\ m^2$.

27. A área de um losango é $18{,}50\ m^2$ e uma das suas diagonais mede 5 m. Calcular o comprimento da outra. R. 7,4 m.

28. As bases de um trapézio medem, respectivamente, 12 e 10 centímetros e sua altura é 4,8 cm. Calcular a área. R. $52{,}80\ cm^2$.

29. As bases de um trapézio medem, respectivamente, 3,8 e 0,9 metros e sua área é igual a $3{,}29\ m^2$. Calcular a altura. R. 1,4 m.

30. As bases de um trapézio isóscele são 7,2 m e 5,4 m. Calcular sua área, tendo em conta que cada um dos lados iguais mede 2,8 m.
R. $16{,}701\,3\ m^2$.

31. Calcular a área do hexágono regular cujo lado mede 3,4 m.
R. $29{,}998\,2\ m^2$.

32. Calcular a área do octógono regular convexo cujo lado mede 3 m.
R. $43{,}452\,0\ m^2$.

33. Calcular a área do triângulo eqüilátero cujo raio mede 3,5 m.
R. 15,912 7.

34. Calcular a área do quadrado cujo raio mede 1,25 m. R. $3{,}125\,0\ m^2$.

35. Calcular a área do hexágono regular cujo raio mede 1,7 m.
R. $7{,}499\,5\ m^2$.

ÁREAS DAS FIGURAS CIRCULARES

281. **Área do círculo.** — *A área de um círculo tem por medida o semiproduto dos números que exprimem a medida do comprimento da circunferência e do raio.*

Por definição, considera-se a área do círculo como o limite para o qual tende a área de um polígono regular convexo nêle inscrito cujo número de lados aumenta indefinidamente.

Designando por P o perímetro e por A o apótema de um polígono regular convexo, inscrito num círculo de raio R, a sua área será dada pela expressão

$$S = \frac{P}{2} \cdot A.$$

Admitindo que o número de lados do polígono aumenta indefinidamente, é bem de ver que a sua área tende para a do círculo, o seu perímetro para a circunferência e o seu apótema para o raio.

Assim, representando por S a área do círculo, temos

$$S = \frac{C}{2} \cdot R.$$

282. **Expressão da área do círculo.** — Tendo em vista que o comprimento da circunferência é dado pela fórmula (n. 248)

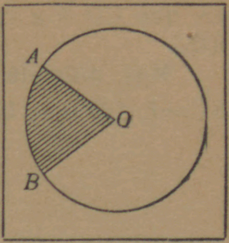
$$C = 2\pi R,$$

a expressão estabelecida no parágrafo anterior, toma a forma seguinte:

$$S = \frac{2\pi R}{2} \cdot R,$$

$$\boxed{S = \pi R^2.} \qquad (1)$$

283. **Área de um setor circular.** — *A área de um setor circular tem por medida a metade do produto dos números que exprimem a medida do arco que lhe serve de base e do raio.*



Seja AOB um setor circular de n graus, figura ao lado.

Notando que a área do círculo é dada pela expressão (n. 282)

$$S = \pi R^2,$$

segue-se que a área do setor de um grau será

$$\frac{\pi R^2}{360},$$

e a área, S, do setor de n graus,

$$S = \frac{\pi R^2 n}{360}. \qquad (2)$$

Por outro lado, tendo em vista que a expressão (2) pode ser posta sob a forma

$$S = \frac{\pi R n}{180} \times \frac{R}{2},$$

e que (n. 254)

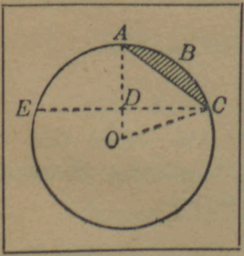
$$\frac{\pi R n}{180} = l,$$

segue-se que

$$\boxed{S = \frac{lR}{2},} \qquad (3)$$

em que l representa o comprimento do arco de n graus.

284. **Área de um segmento circular.** — *A área de um segmento circular tem por medida a metade do produto do raio pela diferença entre o comprimento do arco e a semi-corda do arco duplo.*



Seja o segmento circular ABC, figura ao lado.

A área do segmento considerado é a diferença entre a área do setor circular OABC e a do triângulo OAC.

Assim, designando-a por S, temos

$$S = \frac{OA \times \widehat{AC}}{2} - \frac{OA \times CD}{2},$$

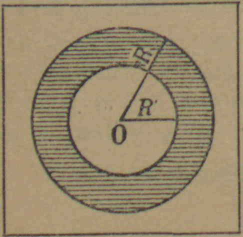
em que CD é a metade da corda CE do arco CAE, dôbro de ABC.

Mas, notando que OA é o raio, R, do círculo e fazendo $\widehat{AC} = l$, $CD = h$, temos

$$S = \frac{Rl - Rh}{2},$$

$$\boxed{S = \frac{R(l-h)}{2}.}$$

285. **Área de uma coroa circular.** — *A área de uma coroa circular tem por medida o produto do número π pela diferença dos quadrados dos números que exprimem a medida dos raios das circunferências que a limitam.*



Consideremos a coroa circular formada pelas circunferências cujos raios são R e R'.

Evidentemente, a área da coroa, S, é igual à diferença entre as áreas dos círculos que a formam. Assim:

$$S = \pi R^2 - \pi R'^2,$$

$$\boxed{S = \pi (R^2 - R'^2).}$$

286. **Exercícios.** — 1.º *O comprimento de uma circunferência é 12 m. Calcular a área do círculo.*

Empregando a fórmula (n. 248)

$$C = 2\pi R,$$

encontramos

$$R = \frac{C}{2\pi} \quad \text{ou} \quad R = \frac{12}{2 \times 3,14},$$

$$R = 1,91 \text{ m}.$$

Aplicando, agora, a fórmula (n. 282)

$$S = \pi R^2$$

obtemos

$$S = 3,14 \times 1,91^2,$$
$$S = 11,455\,0 \text{ m}^2.$$

2.º *O lado de um triângulo eqüilátero inscrito mede 10 m. Calcular a área de um setor de 20º pertencente ao mesmo círculo.*

Aplicando a fórmula (n. 228)

$$l_3 = R\sqrt{3},$$

encontramos

$$R = \frac{10}{\sqrt{3}} \quad \text{ou} \quad R = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

$$R = 5{,}77 \text{ m.}$$

Considerando, agora, a fórmula (n. 283)

$$S = \frac{\pi R^2 n}{360}$$

obtemos

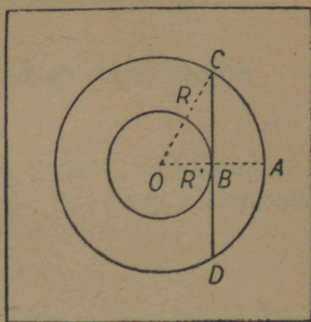
$$S = \frac{3{,}14 \times 5{,}77^2 \times 20}{360}$$

$$S = 5{,}807\,7 \text{ m}^2.$$

3.º *Duas circunferências são concêntricas. Uma corda da maior, tangente à menor, mede 6 m. Calcular a área da coroa.*

Como se sabe, a área de uma coroa circular é dada pela expressão (n. 285)

$$S = \pi (R^2 - R'^2). \qquad (1)$$



Mas de acôrdo com a figura, no triângulo retângulo OBC, temos

$$R^2 - R'^2 = \overline{BC}^2$$

ou, notando que

$$BC = \frac{CD}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$R^2 - R'^2 = 3^2.$$

Fazendo as substituições na expressão (1), encontramos

$$S = 3{,}14 \times 9$$

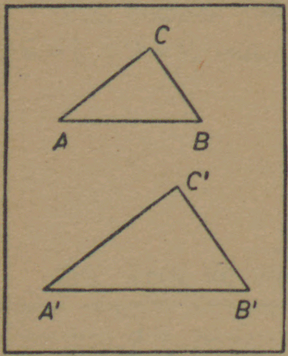
$$S = 28{,}26 \text{ m}^2.$$

RELAÇÕES MÉTRICAS ENTRE AS ÁREAS

287. **Áreas de triângulos semelhantes.** — *As áreas de dois triângulos semelhantes estão entre si como os quadrados de dois lados homólogos.*

Consideremos os triângulos semelhantes ABC e A'B'C', vistos na figura a seguir.

Designando, respectivamente, por b e b', h e h', S e S′, as bases, alturas e áreas dêsses triângulos, temos, de acôrdo com o estabelecido no parágrafo 269,



$$S = \frac{bh}{2} \quad \text{e} \quad S' = \frac{b'h'}{2}.$$

Dividindo ordenadamente as expressões acima, obtemos

$$\frac{S}{S'} = \frac{bh}{b'h'}. \qquad (1)$$

Por outro lado, sendo semelhantes os triângulos, temos

$$\frac{b}{b'} = \frac{h}{h'}.$$

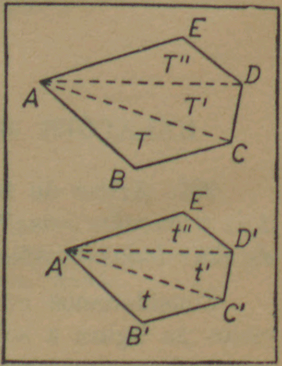
Substituindo, na expressão (1)

$$\frac{h}{h'} \quad \text{por} \quad \frac{b}{b'}$$

chega-se a que

$$\frac{S}{S'} = \frac{b^2}{b'^2}.$$

288. **Áreas de polígonos semelhantes.** — *As áreas de dois polígonos semelhantes estão entre si como os quadrados de dois lados homólogos.*



Consideremos os polígonos semelhantes ABCDE e A′B′C′D′E′, figura ao lado.

Traçando tôdas as diagonais que partem de dois vértices homólogos, A e A′, ficam os polígonos decompostos no mesmo número de triângulos semelhantes, semelhantemente dispostos.

Assim, designando por T, T′ e

T″, e por t, t' e t'' as áreas dêsses triângulos, temos, de acôrdo com o teorema anterior,

$$\frac{T}{t}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2},\quad \frac{T'}{t'}=\frac{\overline{CD}^2}{\overline{C'D'}^2},\quad \frac{T''}{t''}=\frac{\overline{DE}^2}{\overline{D'E'}^2}.$$

Mas, em virtude da semelhança dos polígonos, podemos escrever

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{ED}{E'D'}$$

e, conseqüentemente,

$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}=\frac{\overline{CD}^2}{\overline{C'D'}^2}=\frac{\overline{ED}^2}{\overline{E'D'}^2}.$$

Comparando as relações obtidas, podemos escrever

$$\frac{T}{t}=\frac{T'}{t'}=\frac{T''}{t''}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}.$$

Aplicando, à série de razões iguais acima, a propriedade conhecida, vem

$$\frac{T+T'+T''}{t+t'+t''}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}.$$

Notando, ainda, que

$$T+T'+T''=S$$
$$t+t'+t''=S'$$

segue-se que

$$\frac{S}{S'}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}.$$

289. **Corolário.** — *As áreas de dois polígonos regulares do mesmo número de lados estão entre si como os quadrados dos seus raios ou dos seus apótemas.*

Com efeito, êsses polígonos são semelhantes, e os seus raios e apótemas são segmentos homólogos.

290. Teorema. — *As áreas de dois círculos estão entre si como os quadrados dos seus raios.*

Designando por S e S′ as áreas de dois círculos, cujos raios são R e R′, temos

$$S = \pi R^2 \quad \text{e} \quad S' = \pi R'^2.$$

Dividindo ordenadamente essas expressões, encontramos

$$\frac{S}{S'} = \frac{\pi R^2}{\pi R'^2}$$

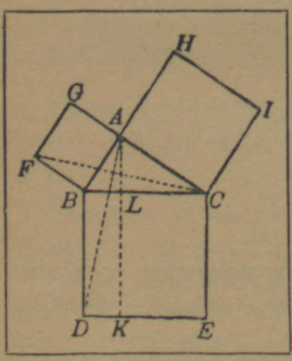
$$\frac{S}{S'} = \frac{R^2}{R'^2}.$$

291. Teorema de Pitágoras. — *O quadrado construído sôbre a hipotenusa de um triângulo retângulo é equivalente à soma dos quadrados construídos sôbre os catêtos.*

Seja o triângulo retângulo ABC.

Sôbre cada um dos lados do triângulo, construamos um quadrado, e, a partir do vértice do ângulo reto, A, tracemos AK, perpendicular à hipotenusa, BC. Tracemos, depois, os segmentos AD e CF.

Tendo o triângulo ABD a mesma base, BD, e a mesma altura, BL, que o retângulo BDKL, é equivalente à metade dêsse retângulo.



Anàlogamente, chega-se a que o triângulo CBF é equivalente à metade do quadrado ABFG.

Mas, nos triângulos ABD e CBF, temos

$$BC = BD,$$

como lados do quadrado BDEC,

$$BF = BA,$$

como lados do quadrado ABFG,

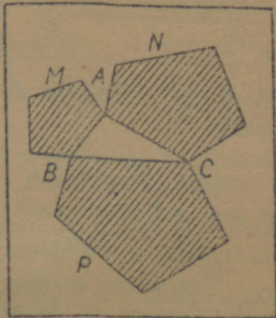
$$F\hat{B}C = A\hat{B}D,$$

como soma de ângulos iguais, um reto e outro comum, ABC.

São, pois, iguais êsses triângulos. Logo, o quadrado ABFG, é equivalente ao retângulo BDKL.

Ademais, demonstra-se fàcilmente, e de modo análogo, que o quadrado ACIH é equivalente ao retângulo LKEC.

Conseqüentemente, o quadrado BDEC, composto dos retângulos BDKL e LKEC, é equivalente à soma dos quadrados ABFG e ACIH.



292. **Corolário.** — *Se construirmos, sôbre os lados de um triângulo retângulo, três polígonos semelhantes, a área do polígono construído sôbre a hipotenusa é equivalente à soma das áreas dos polígonos construídos sôbre os catêtos.*

Com efeito, sendo semelhantes os polígonos construídos sôbre os lados do triângulo retângulo ABC, e, além disso, sendo AB, BC e CA lados homólogos dêsses polígonos, temos (n. 288)

$$\frac{M}{\overline{AB}^2}=\frac{N}{\overline{AC}^2}=\frac{P}{\overline{BC}^2},$$

de onde se deduz

$$\frac{M+N}{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2}=\frac{P}{\overline{BC}^2}.$$

Mas, como (n. 291)

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2,$$

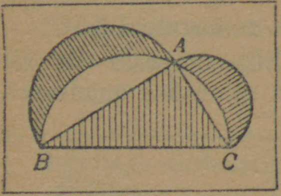
segue-se que

$$M+N=P.$$

293. **Lúnulas de Hipócrates.** — Tomando como diâmetros os lados do triângulo retângulo ABC, construamos três semicircunferências.

Formam-se, assim, duas figuras curvilíneas, denominadas *lúnulas* de Hipócrates.

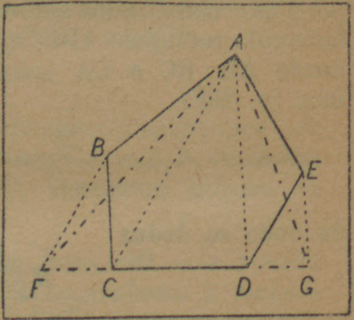
E' de notar que o semicírculo construído sôbre a hipotenusa é equivalente à soma dos semicírculos construídos sôbre os catêtos.



Mas, tendo em vista que a área do triângulo ABC equivale à diferença entre a área do primeiro semicírculo e a soma das áreas dos segmentos circulares, e que a área das lúnulas equivale à diferença entre os outros dois semicírculos e a soma dos mesmos segmentos circulares, segue-se que *a área do triângulo é equivalente à soma das áreas das lúnulas.*

294. **Problema.** — *Construir um triângulo equivalente a um polígono dado.*

Seja o polígono ABCDE, figura ao lado.



Tracemos a diagonal AC, e, pelo vértice B, façamos passar BF, paralela a AC, até o seu encontro com o prolongamento do lado DC do polígono.

Os triângulos ABC e AFC, assim formados, são equivalentes, uma vez que têm a mesma base, AC, e a mesma altura, que é a distância entre as paralelas AC e BF.

Verificada a equivalência dêsses triângulos, temos que o polígono AFDE é equivalente ao proposto, ABCDE.

Traçando, depois, a diagonal AD do novo polígono, forma-se fàcilmente, mediante uma construção análoga à que se empregou, o triângulo AFG, que é equivalente ao polígono considerado.

Notemos que essa construção é aplicável a qualquer polígono e pode ser repetida o número de vêzes que fôr necessário para que se obtenha um triângulo equivalente a um polígono dado.

295. Exercícios propostos.

1. O raio de um círculo é 3,2 m. Calcular a área. R. 32,153 6 m².

2. Calcular o raio do círculo cuja área é igual a 12 m². R. 1,953 m.

3. O comprimento de uma circunferência é 18 m. Calcular a área do círculo. R. 25,796 1 m².

4. A área de um círculo é 200 m². Calcular o comprimento da circunferência. R. 50,051 m.

5. O lado de um quadrado inscrito é 1,5 m. Calcular a área do círculo. R. 3,532 5 m².

6. O perímetro de um hexágono regular inscrito é 1,5 m. Calcular a área do círculo. R. 0,196 2 m².

7. O lado de um triângulo regular inscrito é 12 m. Calcular a área do círculo. R. 150,72 m².

8. A área de um círculo é 160 m². Calcular o lado do quadrado inscrito. R. 10,053 m.

9. A área de um círculo é 48,36 m². Calcular o perímetro do triângulo eqüilátero inscrito. R. 20,344 m.

10. Calcular a diferença entre a área do círculo cujo raio mede 8 m e a área do quadrado inscrito no mesmo. R. 72,96 m².

11. O comprimento do arco de um setor circular é 3,2 m e o raio do círculo mede 1,8 m. Calcular sua área. R. 2,88 m².

12. Calcular a área do setor de 12° pertencente a um círculo cujo raio mede 10 m. R. 10,466 6 m².

13. A área de um setor circular é 2,70 m². Calcular o raio, tendo em conta que o comprimento do arco dêsse setor é 3,6 m. R. 1,5 m.

14. A área de um setor é 37,68 m². Calcular o ângulo central, tendo em conta que o raio mede 12 m. R. 30°.

15. A área de um setor é igual ao quadrado do raio. Calcular o ângulo central correspondente. R. 114°38′58″,85.

16. Calcular a área de um setor de 30°, pertencente a um círculo no qual se encontra inscrito um triângulo eqüilátero cujo lado mede 10 m. R. 8,722 2 m².

17. Calcular a área da coroa circular formada por dois círculos cujos raios são 1,8 m e 1,2 m. R. 5,652 0 m².

18. Calcular a área da coroa formada por dois círculos cujas circunferências medem 26 m e 18 m, respectivamente. R. 28,024 5 m².

19. Calcular a área de uma coroa circular, sabendo que uma corda da maior, tangente à menor, mede 8 m. R. 50,24 m².

20. A área de uma coroa circular é 2,888 8 m². Sendo o raio da circunferência menor igual a 2,2 m, calcular o raio da maior. R. 2,4 m.

21. Calcular a área de um segmento circular cujo arco mede 60°, sabendo que o raio do círculo é 10 m. R. 9,05 m².

22. São dadas três circunferências iguais de 4 m de raio e tangentes duas e duas. Calcular a área da superfície que compreendem. R. 2,56 m².

23. São dados dois círculos secantes iguais de 5 m de raio. Calcular a área comum a ambos, sabendo que a distância dos centros é igual ao raio. R. 30,7 m².

24. Calcular o raio do círculo cuja área excede de 2,40 m² a do quadrado nêle inscrito. R. 1,45 m.

25. As áreas de dois círculos estão entre si como 9 para 25. Sendo o raio do menor igual a 3 m calcular o raio do maior. R. 5 m.

LIVROS DE AVENTURAS

Norman Dale

TESOURO PERIGOSO

A MELHOR AVENTURA

Êstes livros têm o seu clímax dentro das normas excitantes da literatura à Sherlock Holmes, sem entretanto o inconveniente de descambar para a literatura criminal pura, que busca seu interêsse na revelação de crimes escabrosos e arrepiantes. São obras equilibradas, cheias de lances emocionantes que poderão ser lidas pelos jovens sem qualquer prejuizo.

EDIÇÕES MELHORAMENTOS

N.º 705