GACYR MUNHOZ MAEDER

V

CURSO DE MATEMÁTICA

"USO AUTORIZADO PELO MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CULTURA"
REGISTRO N.º 864

1.ª SÉRIE - CURSO GINASIAL

17.ª Edição

60a

EDIÇÕES MELHORAMENTOS

ALGACYR MUNHOZ MAEDER
Lente Catedrático
do Colégio Estadual do Paraná, da Escola de Engenharia do Paraná
e da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras do Paraná

CURSO DE MATEMÁTICA

1.ª SÉRIE
CURSO GINASIAL

De acôrdo com os programas oficiais

17.ª EDIÇÃO
Ampliada com novos exercícios

1957

EDIÇÕES MELHORAMENTOS

20x-1/V-7

264.º MILHEIRO

Obras do autor, nas Edições Melhoramentos:

CURSO DE MATEMÁTICA — 1.ª, 2.ª, 3.ª e 4.ª Série — Curso Ginasial
CURSO DE MATEMÁTICA — 1.º, 2.º e 3.º Livro — Ciclo Colegial
MATEMÁTICA COMERCIAL — 1.ª e 2.ª Série — Curso Básico

Nos pedidos telegráficos basta citar o cód. 0-14-251

DO PINHEIRO AO LIVRO, UMA REALIZAÇÃO MELHORAMENTOS

PROGRAMA DE MATEMÁTICA

1.ª Série — Curso Ginasial

Números inteiros; operações fundamentais; números relativos.
Divisibilidade aritmética; números primos.
Números fracionários.
Sistema legal de unidades de medir; unidades e medidas usuais.

PLANO DE DESENVOLVIMENTO DO PROGRAMA MÍNIMO

I — *Números inteiros; operações fundamentais; números relativos.*

1. Noção de número natural, grandeza, unidade, medida. Numeração; numeração falada; numeração escrita. Sistema decimal. Valor absoluto e valor relativo dos algarismos.

2. Adição. Propriedades. Processos de abreviação. Prova.

3. Subtração. Propriedades. Prova. Complemento aritmético de um número.

4. Multiplicação. Propriedades. Processos de abreviação. Prova. Potência de um número. Produto e quociente de potências da mesma base.

5. Divisão. Divisão aproximada. Propriedades. Processos de abreviação. Prova.

6. Números relativos; interpretações. Adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação dos números relativos; regras práticas.

II — *Divisibilidade aritmética; números primos.*

1. Múltiplos e divisores. Divisibilidade. Princípios fundamentais. Caracteres de divisibilidade por 10 e suas potências; por 2, 4 e 8; por 5 e 25; por 3 e 9; por 11. Propriedades elementares dos restos. Provas das operações por um divisor.

2. Números primos e números compostos; números primos entre si. Crivo de Eratóstenes. Reconhecimento de um número primo. Decomposição de um número em fatôres primos. Cálculo dos divisores de um número. Número divisível por dois ou mais números primos entre si dois a dois; aplicação à divisibilidade.

3. Máximo divisor comum. Algoritmo de Euclides; simplificações. Propriedades. Máximo divisor comum pela decomposição em fatôres primos.

4. Mínimo múltiplo comum. Relação entre o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum. Propriedades.

III — *Números fracionários.*

1. Frações. Fração ordinária e fração decimal. Comparação de frações; simplificação; redução ao mesmo denominador. Operações com frações ordinárias.

2. Frações decimais; números decimais. Propriedades dos números decimais; operações. Conversão de fração ordinária em número decimal e vice-versa. Número decimal periódico.

IV — *Sistema legal de unidades de medir; unidades e medidas usuais.*

1. Unidade legal de comprimento; múltiplos e submúltiplos usuais. Área; unidade de área; unidade legal; múltiplos e submúltiplos usuais. Área do retângulo, do paralelogramo, do triângulo, do trapézio e do círculo; fórmulas. Volume; unidade de volume; unidades legais; múltiplos e submúltiplos usuais. Volume do paralelepípedo, do prisma, da pirâmide, do cilindro, do cone e da esfera; fórmulas. Pêso e massa; unidade legal; múltiplos e submúltiplos usuais. Densidade; aplicações.

2. Unidade de ângulo e de tempo. Unidades inglêsas e norte-americanas mais conhecidas no Brasil. Números complexos; operações; conversões.

3. Unidade de velocidade. Velocidade angular.

ÍNDICE

CAPÍTULO I

NOÇÃO DE NÚMERO NATURAL, GRANDEZA, UNIDADE, MEDIDA

1. Coleção de objetos. — Os objetos distintos que vemos em uma sala de aulas, como as carteiras, os livros e cadernos pertencentes aos alunos, formam *coleções* ou *conjuntos.*

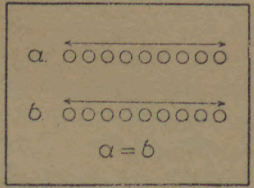
A observação de qualquer objeto isolado ou de cada *elemento* do conjunto traz-nos ao espírito a idéia de *unidade;* a consideração da coleção de carteiras, da coleção de livros ou da coleção de cadernos desperta-nos a idéia de *pluralidade.*

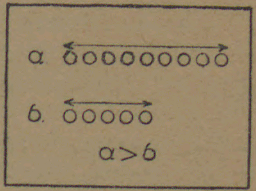
2. Comparação de coleções. — Imaginemos que se desejam comparar entre si duas coleções de moedas de um cruzeiro.

Para facilitar a comparação disporemos as moedas sôbre a mesa, umas em frente das outras, do modo indicado nas figuras que seguem.

Os resultados que se podem apresentar são os seguintes:

1.º Quando fôr colocada a última moeda da coleção *a* também o seja a última da coleção *b.*





Neste caso diremos que há *correspondência* dos elementos das duas coleções, isto é, a cada moeda da coleção *a* corresponde uma moeda da coleção *b* e reciprocamente, a cada moeda da coleção *b* corresponde uma moeda da coleção *a.*

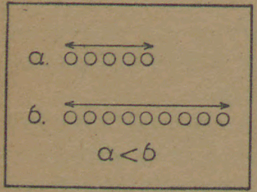
Os conjuntos *a* e *b* dizem-se, então, *equivalentes.*

2.º Pode suceder que, quando fôr colocada na posição indicada a última moeda da coleção *b*, ainda se encontrem algumas a colocar da coleção *a*.

Neste caso, a cada moeda da coleção *b* corresponde uma das moedas da coleção *a*; mas nem a tôdas as moedas da coleção *a* correspondem moedas da coleção *b*.

Dizemos, por isso mesmo, que o conjunto *b* é *parte* do conjunto *a*.

3.º Pode suceder ainda que, quando fôr colocada a última moeda da coleção *a*, ainda se encontrem moedas da coleção *b* a colocar.



Neste caso, cada moeda da coleção *a* corresponde a uma das moedas da coleção *b*; mas nem a tôdas as moedas da coleção *b* correspondem moedas da coleção *a*.

Dizemos, então, que o conjunto *a* é parte do conjunto *b*.

Devemos observar que as três possibilidades examinadas, únicas que se podem apresentar, são independentes da *natureza* dos elementos e da *ordem* em que estão colocados na coleção.

Aliás, êsse processo rudimentar era empregado pelos homens primitivos na comparação das coleções que tinham necessidade de considerar.

3. Observação. — Nos exemplos dados até aqui referimo-nos aos conceitos de *unidade, pluralidade* e *correspondência*. Êsses conceitos são primitivos, isto é, não se definem. Possuímo-los em nosso espírito.

4. Noção de número. — A Aritmética faz *abstração* das qualidades materiais dos objetos naturais.

Assim, ao compararmos duas coleções de objetos, é indiferente, do ponto de vista aritmético, que as coleções sejam de selos, de moedas, de casas, de árvores, de automóveis, de sêres vivos, etc.

Por isso mesmo, dizemos que a Aritmética considera *equivalentes* os sêres reais e abstratos.

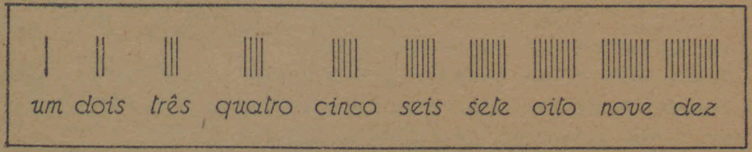
Para comparar tôdas as coleções de objetos pode-se então escolher um *conjunto ideal*, formado de entes abstratos, denominados *números naturais*. Assim:

A noção de número se origina, por abstração, da idéia de coleção de objetos distintos.

5. Sucessão natural dos números. — Reunamos um objeto a outro para formar coleção; dizemos que essa coleção contém um e um, ou *dois* objetos.

Reunamos outro objeto à coleção assim formada; dizemos que a nova coleção contém um e um e um ou *três* objetos. Assim prosseguindo, formaremos cada vez que juntarmos um objeto à coleção já obtida, nova coleção à qual corresponde novo número.

As coleções formadas corespondem aos números



Tais números, denominados inteiros e formados numa ordem determinada, constituem a *sucessão natural dos números.*

Essa sucessão não tem fim, uma vez que, dada uma coleção de objetos, sempre se pode reunir-lhe um objeto mais para formar nova coleção. Dizemos, por isso mesmo, que a sucessão natural dos números é *indefinida.*

A sucessão dos números naturais constitui assim um conjunto infinito denominado *conjunto* ou *classe dos números naturais.*

Contar os objetos de uma coleção significa ordená-los, assinalando-lhes sucessivamente os números *um, dois, três,...* até chegar ao último elemento. Encontra-se assim o número correspondente à coleção.

6. Zero. — Mediante procedimento inverso ao indicado acima poderemos desfazer uma coleção, retirando um a um todos os seus objetos.

Retirado o último, a coleção esgota-se ou desaparece.

Para indicar êsse fato costuma-se dizer que o número de objetos da coleção se reduziu a zero.

Um conjunto sem elementos denomina-se conjunto *vazio* ou *nulo.*

Zero então é o número definido por um conjunto vazio. Devemos notar entretanto que zero não é número natural.

7. Números inteiros. — Acrescentando zero ao conjunto dos números naturais formaremos o *conjunto* ou *classe dos números inteiros.*

Assim, o conjunto dos números inteiros é constituído do conjunto dos números naturais com a inclusão de zero.

8. **Números iguais. — Números desiguais.** — No primeiro caso considerado na comparação de coleções (n.º 2), em que a coleção *a* contém tantas moedas quantas contém a coleção *b*, dizemos que a ambas correspondem *números iguais* ou o mesmo número.

No segundo caso, em que a coleção *b* é parte da coleção *a*, dizemos que o número correspondente à coleção *a* é maior que o número correspondente à coleção *b*.

Inversamente, no terceiro caso, em que a coleção *a* é parte da coleção *b*, dizemos que o número correspondente à coleção *a* é menor que o número correspondente à coleção *b*.

9. **Símbolos.** — Para representar os números inteiros, empregam-se dez símbolos, denominados algarismos.

Correspondem êles aos números seguintes:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
zero	um	dois	três	quatro	cinco	seis	sete	oito	nove.

Os números inteiros podem ser também representados por letras.

Assim é que dizemos, por exemplo, número *a*, número *b*, número *c*, etc.

10. **Sinais de relação.** — Para indicar as relações entre os números empregamos os símbolos seguintes:

$a = b$ (*a* igual a *b*)

$a > b$ (*a* maior que *b*)

$a < b$ (*a* menor que *b*)

$a \neq b$ (*a* diferente de *b*)

$a \geqq b$ (*a* maior ou igual a *b*)

$a \leqq b$ (*a* menor ou igual a *b*).

11. **Números cardinais e ordinais.** — Como tivemos oportunidade de acentuar, qualquer conjunto é representado por um número, denominado *número cardinal do conjunto*.

Por outro lado, a posição de cada elemento no conjunto é também indicada por um número, denominado *número ordinal*.

Ao cardinal *um* coresponde o ordinal *primeiro*; ao cardinal *dois*, o ordinal *segundo*; ao cardinal *três* o ordinal *terceiro*, etc.

12. **Grandezas.** — Como vimos, as coleções de objetos distintos podem ser *comparadas* entre si, isto é, dadas duas coleções *A* e *B*, podemos verificar se a coleção A é *maior*, *menor* ou *igual* à coleção B.

Dizemos então, que as coleções de objetos são *grandezas*.

Anàlogamente, podem ser *comparadas* entre si as alturas dos edifícios, os volumes dos sólidos, os valores dos livros, etc.

Por isso mesmo, dizemos que o *comprimento*, o *volume*, o *valor* são grandezas.

Ao comparar entre si duas coleções de objetos ou as alturas de dois edifícios, verificamos que a maior é *igual à soma* da menor com uma terceira. Assim:

Grandezas são entes abstratos entre os quais se pode definir a igualdade e a soma.

Além dêsses exemplos de grandezas, outros poderíamos aduzir: a *intensidade* de uma fôrça, a *velocidade* de um móvel, a *temperatura* de um corpo, etc.

As grandezas podem ser *contínuas* ou *descontínuas*.

A grandeza *contínua* é formada por um todo homogêneo e pode ser dividida, sem alteração da sua natureza, em partes tão pequenas quanto se queira. — Exemplo: o comprimento de um segmento de reta.

A grandeza *descontínua* é formada por coleção de objetos distintos não podendo ser dividida, sem alteração da sua natureza, em partes tão pequenas quanto quisermos. — Exemplo: uma coleção de moedas.

Do ponto de vista matemático, só nos interessa o estudo das grandezas *mensuráveis*, isto é, que podem ser representadas por números.

Medir uma grandeza é compará-la com outra da mesma espécie e conhecida, denominada *unidade*.

O resultado dessa comparação chama-se *medida* da grandeza considerada em relação à unidade adotada.

Assim, a medida de uma grandeza é um número seguido da unidade que serviu na medição.

13. **Unidade.** — *Unidade* é uma grandeza conhecida de que nos servimos para medir tôdas as grandezas da mesma espécie.

Na medição de grandezas descontínuas, a unidade é determinada. Exemplo: para medir um grupo de carteiras a unidade é a carteira.

Assim, a medição de uma grandeza descontínua consiste simplesmente na contagem dos objetos que a constituem, sendo cada um dêles considerado como unidade.

Na medição das grandezas contínuas, a unidade é arbitrária, devendo ser prèviamente escolhida. — Exemplo: para medir a distância de duas cidades podemos escolher o metro, o quilômetro, a milha.

14. **Medida.** — Como vimos, o resultado da medição de uma grandeza chama-se *medida*, e esta é um número seguido da designação da unidade que serviu na medição.

Quando a grandeza é constituída de uma coleção de unidades a sua medida é *número inteiro*. — Exemplo: *oito* livros, *sete* metros.

Em relação às grandezas contínuas, nem sempre a sua medida é *número inteiro*. Como veremos mais tarde, poderá ser *número fracionário* ou *número irracional.*

Por enquanto, só trataremos das grandezas cujas medidas são números inteiros.

CAPÍTULO II

NUMERAÇÃO FALADA E ESCRITA; SISTEMA DECIMAL

15. **Numeração.** — Aos primeiros números da sucessão natural foram dados nomes especiais e para representá-los empregaram-se sinais gráficos diferentes.

Sendo, entretanto, indefinida essa sucessão, não seria possível continuarmos inventando nomes e símbolos arbitrários para todos os números que se possam formar. Além disso, nossa memória não os reteria e êsses nomes e símbolos não dariam idéia perfeita da ordem de grandeza dos números a que devessem corresponder.

Para facilitar a representação dos números, criou-se, então, a numeração.

Numeração é o conjunto de princípios e artifícios empregados para a representação dos números.

A numeração compreende duas partes: numeração falada e numeração escrita.

O objeto da *numeração falada* é dar nomes aos números com auxílio de pequeno grupo de palavras, combinadas segundo regras simples, de modo que êsses nomes possam dar idéia da ordem de grandeza dos números a que correspondem.

O objeto da *numeração escrita* é representar os números mediante pequeno número de sinais (algarismos), de modo que os símbolos assim formados possam dar idéia da ordem de grandeza dos números a que correspondem.

16. **Numeração falada.** — Os primeiros números naturais receberam os nomes seguintes: *um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove, dez.*

Como veremos a seguir, servindo-nos dêsse pequeno grupo de palavras, poderemos contar os objetos de qualquer coleção. Imaginemos que se trate de uma coleção de selos.

Grupemos os selos de dez em dez, denominando *dezena* a cada grupo assim obtido. Depois de formados sete dêsses grupos, admitamos que ainda restam cinco selos da coleção a considerar.

Diremos, então, que nossa coleção se compõe de *sete dezenas* de selos e *cinco* selos.

Por outro lado, se obtivermos mais de dez grupos de dez selos, isto é, mais de dez dezenas, poderemos formar novos grupos reunindo de dez em dez os precedentes. A cada um dos grupos assim constituído denominamos *centena*.

Se, depois de obtidos nove dêsses grupos, ainda restarem na coleção sete grupos-dezenas e cinco selos, diremos que o número de selos contidos na coleção é *nove centenas, sete dezenas* e *cinco*.

Admitamos, ainda, que a coleção contenha mais de dez grupos-centenas. Reunindo-os de dez em dez, formaremos outros grupos, a cada um dos quais chamaremos *milhar*.

Se, depois de obtidos três dêsses grupos, ainda restarem na coleção nove grupos-centenas, sete grupos-dezenas e cinco selos, diremos que o número de selos da coleção é *três milhares, nove centenas, sete dezenas* e *cinco*.

Ao iniciar a contagem dos selos da nossa coleção, a unidade era o sêlo: *unidade simples*. Depois de formados os grupos de dez selos cada um, a unidade passou a ser um dêles: *dezena*. Essa unidade já não é simples como a precedente, mas composta ou de *segunda ordem*. Prosseguindo na contagem, formamos novos grupos, constituído cada um de dez dos precedentes. Passamos a adotar, então, nova unidade: *centena*. À essa unidade damos a denominação de *unidade de terceira ordem*.

17. Convenção fundamental. — Segundo o processo de contagem adotado no parágrafo anterior,

dez unidades simples formam uma *dezena;*

dez dezenas formam uma *centena;*

dez centenas formam uma *unidade de milhar.*

Resumindo êsses resultados, enunciamos o princípio fundamental do sistema de numeração decimal:

Dez unidades de uma ordem formam uma unidade de ordem imediatamente superior.

A fim de abreviar a nomenclatura e diminuir o número de palavras a serem empregadas na designação de números superiores aos considerados até aqui, formam-se *classes*, grupando as ordens três a três. Assim:

As unidades de primeira ordem ou *unidades simples*, as de segunda ordem ou *dezenas* e as de terceira ordem ou *centenas* formam a primeira classe ou *classe das unidades*.

As unidades de quarta, quinta e sexta ordem, denominadas respectivamente *unidades de milhar, dezenas de milhar, centenas de milhar* formam a segunda classe ou *classe dos milhares*.

As unidades das três ordens seguintes, chamadas *unidades de milhão, dezenas de milhão, centenas de milhão*, formam a terceira *classe dos milhões*.

Assim, para enunciar os números usuais, bastam treze palavras, as quais correspondem aos números de um a nove, dez (uma dezena), cem (uma centena), mil (um milhar) e um milhão.

Para enunciar números ainda maiores, emprega-se uma palavra nova, formada com a terminação *lhão*. Formam-se, assim, as classes dos *bilhões*, dos *trilhões*, etc.

18. **Observação.** — Foram consagradas pelo uso as seguintes modificações:

1.ª Diz-se *onze, doze, treze, quatorze, quinze* em vez de dez e um, dez e dois, dez e três, dez e quatro, dez e cinco. As denominações *dezesseis, dezessete, dezoito* e *dezenove* foram apenas contraídas.

2.ª Diz-se *dez, vinte, trinta, quarenta, cinqüenta, sessenta, setenta, oitenta* e *noventa* em vez de uma dezena, duas dezenas, três dezenas, quatro dezenas, cinco dezenas, seis dezenas, sete dezenas, oito dezenas, nove dezenas.

3.ª Diz-se *cem, duzentos, trezentos, quatrocentos, quinhentos, seiscentos, setecentos, oitocentos, novecentos* em vez de uma centena, duas centenas, três centenas, quatro centenas, cinco centenas, seis centenas, sete centenas, oito centenas, nove centenas.

4.ª Diz-se *mil, dois mil, três mil*, etc., em vez de um milhar, dois milhares, três milhares, etc.

19. **Numeração escrita.** — Para representar os números um, dois, três,... nove empregam-se como vimos, os sinais gráficos

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6, \quad 7, \quad 8, \quad 9,$$

denominados *algarismos*.

Servindo-nos dêsses sinais e do símbolo *0* (zero), cuja significação daremos adiante, poderemos representar todos os números que desejarmos.

Essa representação torna-se possível, mediante a convenção fundamental que enunciamos a seguir.

20. Convenção fundamental. — *Todo algarismo escrito à esquerda de outro representa unidades dez vêzes maiores do que representaria se estivesse escrito no lugar dêsse outro.*

Assim, a partir da direita, o primeiro algarismo representa unidades simples, o segundo dezenas, o terceiro centenas, etc.

Exemplo: no número

624

temos seis *centenas*, duas *dezenas* e quatro *unidades*.

Quando, em um número dado para ser escrito, faltarem unidades de certas ordens, indicaremos o fato escrevendo o símbolo *0* (zero) nos lugares correspondentes àquelas ordens.

Exemplo: o número

705

contém sete *centenas* e cinco *unidades*. Nêle faltam as dezenas.

21. Regra para escrever os números. — De acôrdo com a convenção fundamental da numeração escrita e as observações sôbre o emprêgo do símbolo *0*, podemos enunciar a seguinte regra para escrever qualquer número inteiro:

Escrevem-se uns em seguida aos outros, da esquerda para a direita, os algarismos que representam as unidades das diferentes ordens, a partir das unidades de ordem mais elevada, indicando-se com zeros as unidades de qualquer ordem que faltarem.

Exemplo: o número cinco milhões, trezentos e seis mil e sete unidades é escrito com algarismos do modo seguinte:

5 306 007.

22. Regra para ler os números. — Para se ler um número inteiro qualquer escrito, emprega-se a regra enunciada a seguir.

Separam-se, no número dado, classes de três algarismos da direita para a esquerda, podendo a última à esquerda conter um, dois ou três algarismos; em seguida, lêem-se separadamente as classes, da esquerda para a direita, dando-se a cada uma a denominação que lhe corresponde.

Exemplo: o número

3 625 713

lê-se do modo seguinte: três milhões, seiscentos e vinte e cinco mil, setecentos e treze.

23. Valores dos algarismos. — O símbolo *0*, usado para indicar nos números ausência de unidades de certa ordem, é considerado algarismo. Eleva-se, assim, a dez o número de algarismos arábicos usados na representação dos números.

Os algarismos 1, 2, 3,... 9 denominam-se *significativos* e podem apresentar dois valores: absoluto e relativo.

Valor absoluto é o valor que o algarismo representa quando está isolado.

Valor relativo é o valor que o algarismo representa conforme a posição que ocupa no número.

Exemplo: em o número

14 639,

o valor absoluto do algarismo 6 é *seis unidades* e o valor relativo é *seis centenas*.

24. Sistema decimal. — De acôrdo com as convenções estabelecidas anteriormente, *dez* unidades de uma ordem qualquer formam uma unidade de ordem imediatamente superior. Por isso dizemos que o sistema de numeração estudado é *decimal* ou de base dez.

Assim, *base* de um sistema de numeração é o número de unidades necessárias para formar uma unidade de ordem imediatamente superior.

Adotando bases diferentes de dez, poderíamos formar outros sistemas de renumeração. O sistema decimal, porém, é universalmente adotado.

25. Numeração romana. — Os algarismos que adotavam os romanos em sua numeração eram sete letras maiúsculas do alfabeto latino, às quais atribuíam os valores seguintes:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

E, com auxílio das regras que enunciaremos a seguir, representavam os números usuais empregando apenas êsses símbolos.

A numeração romana, por não apresentar vantagens de ordem prática, encontra-se quase completamente abandonada.

Assim é que só dela nos servimos em casos especiais, como sejam, por exemplo, na indicação dos capítulos de livros, das datas nos monumentos, das divisões horárias nos mostradores de relógios, para distinguir a cronologia dos reis, dos papas, etc.

Os algarismos romanos são combinados mediante as regras seguintes:

1.ª *Os valores representados por algarismos iguais escritos juntos devem ser somados.*

Exemplos:

$$\mathrm{II} = 2; \quad \mathrm{XX} = 20; \quad \mathrm{CC} = 200; \quad \mathrm{MM} = 2\,000;$$
$$\mathrm{III} = 3; \quad \mathrm{XXX} = 30; \quad \mathrm{CCC} = 300; \quad \mathrm{MMM} = 3\,000.$$

Observação: Os algarismos V, L e D não se repetem; os demais podem ser tomados consecutivamente até três vêzes no máximo.

2.ª *O valor de um algarismo escrito à direita de outro de valor maior deve ser somado ao valor dêsse outro.*

Exemplos:

$$\mathrm{VI} = 6; \quad \mathrm{LX} = 60; \quad \mathrm{DC} = 600;$$
$$\mathrm{XI} = 11; \quad \mathrm{CX} = 110; \quad \mathrm{MC} = 1100.$$

3.ª *O valor de um algarismo escrito à esquerda de outro de valor maior deve ser subtraído do valor dêsse outro.*

Exemplos:

$$\mathrm{IV} = 4; \quad \mathrm{XL} = 40; \quad \mathrm{CD} = 400;$$
$$\mathrm{IX} = 9; \quad \mathrm{XC} = 90; \quad \mathrm{CM} = 900.$$

4.ª *Para tornar o valor de um número representado com algarismos romanos mil, um milhão, um bilhão, etc., de vêzes maior, basta colocar-se sôbre êle um, dois, três, etc., traços horizontais.*

Exemplos:

$$\overline{\mathrm{X}} = 10\,000; \quad \overline{\overline{\mathrm{LX}}} = 60\,000\,000.$$

26. Exercícios.

1. Quantas centenas há em seiscentas unidades? R. 6.
2. Quantas dezenas há em sete centenas? R. 70.
3. Quantos milhares há em trinta centenas? R. 3.
4. Quantas dezenas há em 8 milhares? R. 800.

5. Quantas dezenas contém o número 528? R. 52.
6. Quantas centenas contém o número 6 245? R. 62.
7. Quantas unidades de milhar contém o número 75 639? R. 75.
8. Escrever o número formado de 3 unidades de quinta ordem, 5 de terceira e 4 de segunda. R. 30 540.
9. Quantas unidades de quarta ordem são precisas para formar 5 unidades de quinta ordem? R. 50.
10. Quantas dezenas são necessárias para formar 25 unidades de quarta ordem? R. 2 500.
11. Quantas classes há em um número de seis algarismos? R. 2.
12. Quantas classes há em um número de dez algarismos? R. 4.
13. Qual é a ordem mais elevada em um número de cinco algarismos? R. Dezena de milhar.
14. Qual é a ordem mais elevada em um número de nove algarismos? R. Centena de milhão.
15. Qual é o maior número de dois algarismos? R. 99.
16. Qual é o menor número de três algarismos? R. 100.
17. Qual é o maior número de quatro algarismos? R. 9 999.
18. Quantos números inteiros da sucessão natural estão compreendidos entre os números 35 e 72? R. 36.
19. Quantos números inteiros da sucessão natural há desde o menor número de dois algarismos até o maior número de 3 algarismos? R. 990.
20. Escrever com algarismos romanos o número 68. R. LXVIII.
21. Escrever com algarismos romanos o número 1950. R. MCML.
22. Escrever com algarismos romanos o número 12 508. R. $\overline{\mathrm{XII}}\mathrm{DVIII}$.
23. Escrever com algarismos romanos o número 120 758 R. $\overline{\mathrm{CXX}}\mathrm{DCCLVIII}$.

24. Escrever em algarismos romanos a data: 7 de setembro de 1822.
R. VII-IX-MDCCCXXII.

25. Escrever com algarismos romanos a data: 15 de novembro de 1889.
R. XV-XI-MDCCCLXXXIX.

26. Escrever em algarismos no sistema decimal o número CDXXV.
R. 425.

27. Representar com algarismos no sistema decimal o número MCMXXX.
R. 1 930.

28. Representar com algarismos no sistema decimal o número MMCCCXX.
R. 2 320.

29. Representar com algarismos no sistema decimal o número MMDXVIII.
R. 2 518.

30. Representar com algarismos no sistema decimal o número $\overline{\text{XII}}$CCCXLII.
R. 12 342.

31. Qual o maior número de três algarismos significativos diferentes que se pode escrever no sistema de numeração decimal?
R. 987.

32. Qual o menor número de quatro algarismos significativos diferentes que se pode escrever no sistema de numeração decimal?
R. 1 234.

33. Se intercalarmos um zero entre os algarismos do número 65, de quanto aumentará o número? R. De 540.

34. De quantas dezenas aumenta o número 128 quando se intercalam dois zeros entre os algarismos 1 e 2? R. De 990.

35. Escrevendo-se dois zeros entre os algarismos 7 e 2 do número 37 215, de quantos milhares aumenta o número? R. De 3 663.

36. Se escrevermos a sucessão dos números naturais desde 1 até 200, quantas vêzes aparecerá o algarismo 5 no lugar das unidades?
R. 20.

37. Escrevendo-se a sucessão dos números naturais desde 1 até 328, quantas vêzes aparece o algarismo 3 no lugar das unidades?
R. 33.

38. Quando se escreve a sucessão dos números naturais desde 1 até 500, quantas vêzes aparece o algarismo 7 no lugar das dezenas?
R. 50.

39. Escrevendo-se a sucessão dos números naturais desde 1 até 4 625, quantas vêzes aparece o algarismo 6 no lugar das centenas?
R. 426

40. Se escrevermos a sucessão dos números naturais deste 1 até 500, quantas vêzes aparecerá o algarismo 4? R. 200.

CAPÍTULO III

ADIÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS

27. **Noção de adição.** — Um estudante compra cinco livros, depois quatro. Reunindo-os em coleção e contando-os, saberá quantos livros adquiriu.

O número de livros da coleção formada é a *soma* dos números de livros das coleções primitivas; êstes últimos são as *parcelas*. A operação mediante a qual se obtém a soma dos números correspondentes às coleções dadas chama-se *adição*.

Evidentemente, para que a reunião de duas ou mais coleções possa formar coleção é necessário que os objetos que as constituem sejam da *mesma espécie*.

28. **Definições.** — *Adição é a operação que tem por fim, dados dois ou mais números, achar um outro que contenha tantas unidades quantas há nos números dados.*

Para indicar a adição de dois ou mais números usa-se o sinal +, que se lê *mais*. — Exemplo:

$$5 + 4.$$

Os números dados a somar denominam-se *parcelas* ou *têrmos* da adição e o resultado da operação chama-se *soma* ou *total*.

A soma dos números 5 e 4 representa-se pela *igualdade*

$$5 + 4 = 9.$$

O têrmo ou conjunto de têrmos colocados à esquerda do sinal = denomina-se *primeiro membro* da igualdade e o têrmo ou conjunto de têrmos escritos à direita do sinal = chama-se *segundo membro* da igualdade.

29. **Sinais de reunião.** — Além dos sinais de relação mencionados em capítulo anterior e dos demais que serão mais tarde introduzidos, devemos considerar os seguintes:

$$(\ ),\ [\ ],\ \{\ \}.$$

O *parêntese* ( ) indica que as operações nêle contidas devem ser consideradas como efetuadas. Os *colchêtes* [ ] e as *chaves* { } são usados com a mesma significação dos parênteses.

30. **Propriedades da adição.** — I. *A ordem das parcelas não altera a soma.* (Propriedade comutativa da soma).

Imaginemos sôbre a nossa mesa três coleções de moedas, tendo a primeira 5, a segunda 6 e a terceira 8, as quais reunimos para formar coleção única.

Evidentemente, o número de moedas da coleção assim formada será o mesmo, quer reunamos as duas primeiras coleções e depois a terceira, ou a primeira e a terceira e depois a segunda, ou ainda a segunda e a terceira e depois a primeira. Assim:

$$5+6+8=5+8+6=6+8+5.$$

II. *A soma não se altera se duas ou mais parcelas forem substituídas pela sua soma efetuada.* (Propriedade associativa da soma).

Com efeito, voltando ao exemplo anterior, se reunirmos uma a uma as coleções dadas para formar coleção única ou se juntarmos duas delas em uma só e a esta reunirmos a terceira, o número de moedas da coleção final será sempre o mesmo. — Logo:

$$5+6+8=5+(6+8).$$

31. **Prática da operação.** — Consideremos, primeiramente, o caso da adição de números de um só algarismo.

Seja efetuar a soma

$$5+3.$$

Temos

$$5=1+1+1+1+1,$$
$$3=1+1+1.$$

Tomando tôdas as unidades dos números dados, vem

$$5+3=1+1+1+1+1+1+1+1=8.$$

Na prática, não temos necessidade de operar assim, por isso que guardamos de memória os resultados das adições de dois números de um só algarismo.

Consideremos agora o caso da adição de números de vários algarismos.

Seja efetuar a soma

$$48+239+387.$$

Dispomos os números dados de modo que as unidades de mesma ordem de todos êles fiquem colocadas em uma mesma coluna.

48
239
387
674

Somando as unidades simples, encontramos

$$8+9+7=24.$$

Escrevemos 4 na coluna das unidades, sob o traço, e retemos mentalmente 2 dezenas para somá-las às dezenas dos números dados. Temos, assim,

$$2+4+3+8=17.$$

Escrevemos 7 na coluna das dezenas, retendo 1 centena para ser somada às centenas das parcelas:

$$1+2+3=6.$$

Escrevendo 6 na coluna das centenas, obtemos o resultado, 674.

32. **Regra.** — *Para somar dois ou mais números, somam-se sucessivamente as unidades de mesma ordem de todos êles, a partir das unidades simples; se, de alguma dessas somas parciais, resultarem unidades de ordem imediatamente superior, essas são reservadas para serem somadas às de ordem correspondente.*

Quando são muitos os números dados a somar, facilita-se a operação separando-os em pequenos grupos, somando-se êsses grupos e depois as somas parciais obtidas. — Exemplos:

315		1 259	
296		433	
481	1 092	721	2 413
524		2 473	
246		365	
187	957	1 031	3 869
2 049	2 049	6 282	6 282

33. **Prova da adição.** — *Prova* de uma operação é outra operação que se efetua a fim de verificar a exatidão do resultado obtido na primeira.

Aplicando as propriedades da adição, podemos obter a prova dessa operação de dois modos diferentes:

1.º Altera-se a ordem das parcelas e efetua-se novamente a soma. De acôrdo com a propriedade comutativa da adição o segundo resultado deve ser igual ao primeiro.

2.º Somam-se separadamente as parcelas em grupos e depois somam-se os totais obtidos. De acôrdo com o *propriedade associativa* da adição o resultado dêsse modo obtido deve ser igual ao primeiro.

34. Cálculo abreviado. — Em certos casos especiais pode-se obter fàcilmente o resultado de uma adição ou mesmo efetuá-la mentalmente.

A seguir daremos exemplos dos principais processos empregados para êsse fim.

1.º *Processo da decomposição*

Seja efetuar a soma

$$65 + 39.$$

Iniciando a operação pelas unidades de ordem mais elevada temos

$$60 + 30 = 90, \quad 5 + 9 = 14, \quad 90 + 14 = 104.$$

Consideremos novo exemplo:

$$76 + 85 = (70 + 80) + (6 + 5) = 150 + 11 = 161.$$

2.º *Processo de transposição*

Seja efetuar a adição

$$16 + 45 + 54,$$

em que a soma das unidades de dois dos números dados é 10.

Somando preliminarmente os números que apresentam esta particularidade vem

$$16 + 54 = 70.$$

Somando ao resultado obtido a outra parcela, temos

$$70 + 45 = 115.$$

Consideremos novo exemplo:

$$32 + 45 + 18 + 25 = (32 + 18) + (45 + 25) = 50 + 70 = 120.$$

35. Exercícios resolvidos. — 1.º *Um operário entrou numa usina aos 23 anos e nela trabalhou durante 15 anos. Que idade tinha ao sair?*

A idade com que o operário deixou o serviço será dada pela soma da idade que tinha ao ingressar e o número de anos com que trabalhou, ou seja,

idade com que entrou	23 anos
tempo que trabalhou	15 anos
idade com que saiu	38 anos.

2.º *Comprou-se um automóvel usado por 60 000 cruzeiros, gastando-se em reparações 7 500 cruzeiros. Vende-se depois o automóvel com o lucro de 12 000 cruzeiros. Por quanto foi vendido?*

Resolução:

valor da compra	Cr$ 60 000,00
custo das reparações	Cr$ 7 500,00
lucro auferido	Cr$ 12 000,00
valor da venda	Cr$ 79 500,00.

3.º *Repartiu-se certa quantia entre três pessoas, recebendo a primeira 240 cruzeiros, a segunda 60 cruzeiros mais do que a primeira e a terceira 30 cruzeiros mais do que as outras duas juntamente. Qual foi a quantia repartida?*

Resolução:

parte que coube à primeira	240 cruzeiros
à segunda	240 + 60 = 300 cruzeiros
à terceira	30 + 240 + 300 = 570 cruzeiros
quantia repartida	1 110 cruzeiros.

36. Exercícios propostos.

Efetuar *mentalmente* as adições seguintes:

1. 36 + 10 + 3	R. 49.	6. 15 + 75 + 20	R. 110.
2. 42 + 15 + 5	R. 62.	7. 63 + 42 + 37	R. 142.
3. 46 + 14 + 10	R. 70	8. 130 + 120 + 20	R. 270.
4. 33 + 27 + 12	R. 72.	9. 120 + 160 + 45	R. 325.
5. 24 + 25 + 35	R. 84.	10. 210 + 148 + 22	R. 380.

Efetuar pelo *processo da decomposição* as adições seguintes:

11. $324 + 248$ R. 572.

12. $846 + 357$ R. 1 203.

13. $932 + 413$ R. 1 345.

Efetuar pelo *processo da transposição* as adições seguintes:

14. $42 + 35 + 28 + 15$ R. 120.

15. $71 + 47 + 39 + 93$ R. 250.

16. $128 + 144 + 152 + 146$ R. 570.

Resolver os problemas seguintes:

17. Um negociante comprou mercadorias no valor de Cr$ 16 500,00. Por quanto deverá vendê-las para obter o lucro de Cr$ 1 750,00? R. Cr$ 18 250,00.

18. Napoleão nasceu em 1769 e morreu com a idade de 52 anos. Em que ano morreu Napoleão? R. 1 821.

19. Um comerciante comprou mercadorias no valor de Cr$ 32 000,00 e gastou no seu transporte até o depósito Cr$ 1 050,00. Por quanto deverá vendê-las para obter o lucro de Cr$ 3 600,00? R. Cr$ 36 650,00.

20. Uma pessoa devia certa quantia. Pagou 750 cruzeiros na primeira prestação, 620 na segunda e 580 na terceira, ficando ainda a dever 1 250 cruzeiros. Qual era o valor da dívida? R. Cr$ 3 200,00.

21. Quantos dias transcorreram de 1.º de janeiro até 30 de abril em um ano bissexto? R. 121.

22. Um operário ganha 420 cruzeiros em uma semana de trabalho; na seguinte recebe 30 cruzeiros mais do que na primeira; na terceira ganha 45 cruzeiros mais do que na segunda. Quanto recebeu o operário pelas três semanas de trabalho? Cr$ 1 365,00.

23. Repartiu-se certa quantia entre três pessoas, recebendo a primeira 150 cruzeiros, a segunda 30 cruzeiros mais do que a primeira e a terceira 20 cruzeiros mais do que as outras duas juntamente. Qual foi a quantia repartida? R. Cr$ 680,00.

24. Uma pessoa deposita 6 000 cruzeiros em um banco e continua depositando em cada mês seguinte 300 cruzeiros mais do que no anterior. No fim de quatro meses a quanto atingiram os depósitos? R. Cr$ 25 800,00.

25. Repartiu-se certa quantia entre quatro pessoas do seguinte modo: a primeira recebeu 250 cruzeiros e a segunda 180 cruzeiros; deu-se à terceira tanto quanto às duas primeiras juntamente e à quarta tanto quanto à primeira e a terceira juntamente. Qual foi a quantia distribuída? R. Cr$ 1 540,00.

26. Que alteração sofre a soma de duas parcelas se uma delas aumenta de 2 dezenas e a outra de 5 unidades? R. Aumenta de 25.

27. Em uma soma de três números adicionam-se 7 unidades a cada um dêles. Qual é a alteração que sofre a soma? R. Aumenta de 21.

28. A soma de vários números naturais é igual ao número de parcelas. Qual é o valor de cada parcela? R. 1.

29. A soma de dois números é 36 248. Se somarmos 1 275 ao primeiro e 685 ao segundo, qual será o valor da nova soma? R. 38 208.

30. Calcular a soma do maior número de dois algarismos com o maior número de três algarismos.

31. Calcular a soma do maior número de quatro algarismos significativos diferentes com o menor número de três algarismos significativos diferentes. R. 9 999.

32. Qual a propriedade da adição que justifica a igualdade

$$7 + 5 + 9 = 5 + 7 + 9?$$ R. Comutativa.

33. Qual a propriedade da adição que justifica a igualdade

$$8 + 6 + 3 = 8 + 9?$$ R. Associativa.

34. Aplicar a propriedade comutativa à soma

$$S = a + b.$$ R. $S = b + a$.

35. De quantos modos diferentes se pode efetuar a soma

$$S = a + b + c?$$ R. 6.

36. Dada a soma $$S = a + b,$$

que alteração sofre S quando se aumenta a de 8 unidades e b de 7 unidades? R. Aumenta de 15.

CAPÍTULO IV

SUBTRAÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS

37. **Noção de subtração.** — Em uma estante há nove livros. Se retirarmos três dêles e contarmos os livros que ficaram, encontraremos seis.

Assim procedendo efetuamos uma *subtração,* na qual o número de livros que continua na estante é o *resto* proveniente da separação feita.

Dizemos, então, que 6 é o resto da subtração dos números 9 e 3, correspondentes às coleções consideradas.

Por outro lado, temos

$$9 = 6 + 3.$$

38. **Definições.** — *Subtração é a operação que tem por fim, dada a soma de dois números e um dêles, obter o outro.*

Para indicar a subtração, usa-se o sinal —, que se lê *menos.* Exemplo:

$$9 - 3.$$

Os números dados na subtração denominam-se *têrmos.* O maior dêles chama-se *minuendo* e o menor *subtraendo.* O resultado da subtração é denominado *resto, excesso* ou *diferença.*

Exemplo: na subtração

$$9 - 3 = 6,$$

9 e 3 são os têrmos, 9 é o minuendo, 3 o subtraendo e 6 o resto.

Ademais, temos

$$9 = 6 + 3.$$

Em tôda subtração, o minuendo é igual ao subtraendo mais o resto.

39. **Princípios relativos à subtração.** — I. *Para subtrair de um número uma soma indicada, pode-se subtrair dêsse número sucessivamente cada uma das parcelas da soma.*

Com efeito, imaginemos que, de uma coleção constituída de 18 objetos, queremos tirar os objetos necessários para formar três coleções, tendo a primeira 4 objetos, a segunda 5 e a terceira 6 objetos.

Para alcançar o fim desejado, podemos tirar da coleção dada, um a um, os objetos que devem formar as novas coleções, o que significa tirar de 18 a soma de 4, 5 e 6. — Temos assim,

$$18 - (4 + 5 + 6) = 18 - 4 - 5 - 6.$$

II. *Para subtrair de um número uma diferença indicada pode-se juntar a êsse número o subtraendo e do resultado subtrair o minuendo.*

Exemplo:

$$25 - (6 - 3) = (25 + 3) - 6.$$

III. *Para somar a um número a diferença indicada de dois outros pode-se somar ao número o minuendo e do resultado subtrair o subtraendo.*

Exemplo:

$$8 + (6 - 3) = (8 + 6) - 3.$$

IV. *Quando se soma o mesmo número ao minuendo e ao subtraendo o resto não se altera.*

Exemplo:

$$9 - 5 = (9 + 3) - (5 + 3).$$

40. **Prática da operação.** — Consideremos primeiramente o caso em que o subtraendo e o resto são números de um só algarismo. Seja efetuar a subtração seguinte:

$$14 - 6.$$

De acôrdo com a definição, devemos procurar o número que, somado com 6, produza 14.

Sendo

$$6 + 8 = 14,$$

concluímos que

$$14 - 6 = 8.$$

Os resultados das subtrações nas quais o subtraendo e o resto são números de um só algarismo obtêm-se mentalmente.

Consideremos agora a subtração de números quaisquer.

Seja efetuar a subtração

$$645 - 372.$$

Dispomos os números dados de modo que as unidades de mesma ordem de cada um dêles fiquem colocados em uma mesma coluna. Iniciando a operação pelas unidades simples, temos

$$\begin{array}{r} 645 \\ 372 \\ \hline 273 \end{array}$$

$$5 - 2 = 3.$$

Escrevemos 3 na coluna correspondente, sob o traço. Como não é possível subtrair 7 dezenas de 4 dezenas, juntamos dez dezenas ao minuendo e efetuamos a subtração

$$14 - 7 = 7,$$

escrevendo 7 na coluna das dezenas.

E, para não alterar o resultado, devemos somar ao subtraendo uma centena, a qual equivale às dez dezenas somadas ao minuendo. Temos, assim,

$$6 - 4 = 2.$$

$$645 - 372 = 273.$$

41. **Regra.** — *Para subtrair dois números quaisquer, subtraem-se sucessivamente as unidades de mesma ordem de ambos, a partir das unidades simples; se alguma dessas subtrações parciais não fôr possível, somam-se às unidades representadas pelo algarismo do minuendo dez unidades de mesma ordem; efetua-se depois a subtração e aumenta-se de uma unidade o algarismo seguinte do subtraendo.* — Exemplo:

$$\begin{array}{r} 6\,031\,247 \\ 4\,385\,428 \\ \hline 1\,645\,819 \end{array}$$

42. **Prova da subtração.** — Usam-se as seguintes:

1.ª Soma-se o resto ao subtraendo; o resultado deve ser igual ao minuendo. — Exemplo:

$$637 - 249 = 388 \quad \text{e} \quad 249 + 388 = 637.$$

2.ª Subtrai-se o resto do minuendo; o resultado deve ser igual ao subtraendo. — Exemplo:

$$859 - 364 = 495 \quad \text{e} \quad 859 - 495 = 364.$$

43. **Complemento aritmético.** — Dá-se a denominação de *complemento aritmético* de um número ao excesso sôbre êsse número da unidade decimal imediatamente superior à mais elevada nêle contida.

Exemplo: o complemento aritmético do número 638 é a diferença

$$1\,000 - 638 = 362.$$

Na prática, obtém-se o complemento aritmético de um número procedendo do modo seguinte: subtrai-se de nove cada um dos algarismos do número dado a partir da esquerda, exceto o último algarismo significativo que se subtrai de dez.

Assim, para obter o complemento aritmético do número

$$4\,327,$$

efetuamos mentalmente as operações seguintes:

$$9 - 4 = 5, \quad 9 - 3 = 6, \quad 9 - 2 = 7, \quad 10 - 7 = 3.$$

Encontramos dêsse modo o número

$$5\,673,$$

complemento aritmético de 4 327. — Com efeito:

$$10\,000 - 4\,327 = 5\,673.$$

44. **Aplicação.** — Seja a diferença

$$735 - 468.$$

Somando ao minuendo o complemento aritmético do subtraendo e dessa soma subtraindo 1 000, vem

$$735 - 468 = 735 + (1\,000 - 468) - 1\,000,$$

$$735 - 468 = 735 + 532 - 1\,000,$$

$$735 - 468 = 1\,267 - 1\,000,$$

$$735 - 468 = 267.$$

Vemos, então, que o resultado de uma subtração pode ser obtido do modo seguinte: soma-se ao minuendo o complemento do subtraendo e subtrai-se do resultado uma unidade de ordem imediatamente superior à mais elevada contida no subtraendo.

45. Cálculo abreviado. — Damos a seguir algumas indicações fundadas nos princípios da subtração, mediante as quais, em certos casos, pode ser obtida mentalmente a diferença de dois números.

1.ª *Decomposição do subtraendo em soma.*

Exemplo:

$$75 - 23 = 75 - (20 + 3) = 75 - 20 - 3 = 55 - 3 = 52.$$

2.ª *Decomposição do subtraendo em diferença.*

Exemplo:

$$82 - 27 = 82 - (30 - 3) = 82 - 30 + 3 = 52 + 3 = 55.$$

46. Somas e diferenças combinadas. — Consideremos a expressão

$$35 - 8 - 10 + 15.$$

Aplicando os princípios relativos às somas e diferenças, podemos escrever

$$35 - 8 - 10 + 15 = 35 - (8 + 10) + 15 =$$
$$= (35 + 15) - (8 + 10) = 50 - 18 = 32.$$

Tendo em vista o resultado obtido, podemos estabelecer a regra enunciada a seguir.

Para calcular o valor de uma expressão aritmética somam-se todos os têrmos aditivos, somam-se todos os têrmos subtrativos; procura-se o excesso da primeira soma sôbre a segunda.

Exemplo: calcular o valor da expressão

$$132 - 85 - 48 + 215 - 28.$$

Aplicando a regra, encontramos

$$132 - 85 - 48 + 215 - 28 = (132 + 215) -$$
$$- (85 + 48 + 28) = 347 - 161 = 186.$$

47. Supressão de parênteses. — De acôrdo com os princípios até agora estudados, podem-se suprimir os parênteses que figuram em uma expressão aritmética mediante a regra enunciada a seguir.

Para suprimir parênteses precedidos do sinal + conservam-se os sinais de todos os têrmos nêles contidos.

Para suprimir parênteses precedidos do sinal — trocam-se os sinais de todos os têrmos nêles contidos. — Exemplos:

$$(12 + 7 - 5) + (8 - 6 + 9) = 12 + 7 - 5 + 8 - 6 + 9.$$
$$27 - (9 + 6) - (13 - 8) = 27 - 9 - 6 - 13 + 8.$$

48. Exercícios resolvidos.

1.º *Quantos anos transcorreram desde o descobrimento do Brasil (1500) até a proclamação da República (1889)?*

Resolução:

ano em que foi proclamada a República ...	1 889
ano em que foi descoberto o Brasil	1 500
número de anos procurado	389.

2.º *A diferença de dois números é 15 e o menor dêles 23. Qual é o maior?*

Resolução:

Deve-se procurar o minuendo de uma subtração na qual o subtraendo e o resto são conhecidos.

Temos, então,

subtraendo	23
resto	15
minuendo	38

3.º *Três cofres contêm moedas de um cruzeiro; no primeiro encontram-se 65; no segundo 18 menos que no primeiro e no terceiro 12 mais que no segundo. Quantas moedas contêm juntos os três cofres?*

Resolução:

moedas contidas no 1.º		65
moedas contidas no 2.º ..	65 − 18 =	47
moedas contidas no 3.º ..	47 + 12 =	59
número total de moedas		171

49. Exercícios propostos.

Efetuar mentalmente as operações seguintes:

1. 47 − 15.	R. 32.	6. 126 − 16.	R. 110.
2. 84 − 54.	R. 30.	7. 153 − 62.	R. 91.
3. 76 − 21.	R. 55.	8. 354 − 121.	R. 233.
4. 56 − 19.	R. 37.	9. 525 − 212.	R. 313.
5. 79 − 25.	R. 54.	10. 985 − 895.	R. 90.

Calcular o complemento aritmético dos números seguintes:

11. De 4 727. R. 5 273.
12. De 6 357. R. 3 643.
13. De 12 805. R. 87 195.
14. De 23 696. R. 76 304.
15. De 130 638. R. 869 362.

Calcular as expressões seguintes:

16. $215 - (13 + 18)$. R. 184.
17. $428 - (32 - 15 - 10)$. R. 421.
18. $542 - (154 - 132 + 75)$. R. 445.
19. $(37 - 18) + (20 - 15) - (62 - 50)$. R. 12.
20. $30 - (9 - 3) + (7 - 5) - (8 - 5 - 2)$. R. 25.
21. $(28 - 12) - (20 - 8) - (32 - 29) + 6$. R. 7.

Resolver os problemas seguintes:

22. Um negociante vendeu mercadorias no valor de Cr\$ 1 750,00, obtendo o lucro de Cr\$ 245,00. Por quanto as comprara? R. Cr\$ 1 505,00.
23. Uma pessoa vendeu um terreno por 120 000 cruzeiros, obtendo o lucro de 16 500 cruzeiros. Por quanto havia adquirido êsse terreno? R. Cr\$ 103 500,00.
24. Napoleão nasceu em 1769 e morreu em 1821. Com que idade morreu? R. 52 anos.
25. Quantos dias transcorrem de 21 de maio a 17 de julho do mesmo ano? R. 57.
26. Quantos números há de três algarismos? R. 900.
27. Quantos números há de quatro algarismos? R. 9 000.

28. Uma pessoa devia Cr\$ 12 500,00. Depois de efetuar dois pagamentos, o primeiro de Cr\$ 3 200,00 e o segundo de Cr\$ 5 400,00, quanto ficou devendo? R. Cr\$ 3 900,00.
29. Sabendo-se que a soma de dois números é 625 e que um dêles é 137, calcular o outro. R. 488.
30. A diferença de dois números é 129 e o menor dêles é 84. Qual é o maior? R. 213.
31. Sabendo-se que a diferença de dois números é 528 e que o maior dêles é 835, calcular o menor. R. 307.
32. A diferença de dois números é 65 e o menor dêles é 124. Calcular a soma dêsses números. R. 313.
33. A soma de dois números é 80 e um dêles é 42. Calcular a diferença dêsses números. R. 4.
34. Duas caixas contêm o mesmo número de moedas. Tirando-se 18 da primeira para colocar na segunda, quantas moedas conterá a segunda mais do que a primeira? R. 36.
35. Uma pessoa deposita 15 000 cruzeiros em um banco; em três ocasiões sucessivas retira Cr\$ 2 500,00, Cr\$ 3 600,00 e Cr\$ 5 400,00. Quantos cruzeiros restam em sua conta? R. Cr\$ 3 500,00.
36. Três cofres contêm moedas de um cruzeiro; no primeiro encontram-se 25 moedas, no segundo 16 moedas menos que no primeiro e no terceiro 9 moedas mais do que no segundo. Quantas moedas contêm juntos os três cofres? R. 52.
37. O complemento aritmético de um número de três algarismos é 76. Qual é o número? R. 924.
38. O complemento aritmético de um número de quatro algarismos é 1 673. Qual é o número? R. 8 327.
39. A diferença de dois números é 1 285. Se somarmos 318 ao primeiro e subtrairmos 173 do segundo, qual será o valor da nova diferença? R. 1 776.
40. Dada a diferença
$$D = a - b,$$
que alteração sofre D quando se aumenta a de 12 unidades e b de 15 unidades? R. Diminui de 3.
41. Que alteração sofre a diferença
$$D = a - b$$
quando se subtraem 7 unidades de a e 12 de b? R. Aumenta de 5.
42. Que alteração sofre a soma
$$S = a + b + c$$
quando a aumenta de 7 unidades, b de 8 unidades e c diminui de 10 unidades? R. Aumenta de 5.

CAPÍTULO V

MULTIPLICAÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS; POTÊNCIAS

50. **Noção de multiplicação.** — Consideremos o problema seguinte:

Um estudante adquiriu 4 livros ao preço de 15 cruzeiros cada um. Quanto pagou ao livreiro?

Se cada livro custa 15 cruzeiros, o valor da compra será dado pela soma

$$15 + 15 + 15 + 15 = 60 \text{ cruzeiros.}$$

As adições nas quais as parcelas são tôdas iguais recebem a denominação particular de *multiplicação.*

O total obtido chama-se *produto* e a parcela que se repete *multiplicando;* o número de parcelas é o *multiplicador.*

O produto é da mesma espécie do multiplicando por ser a soma da mesma espécie das parcelas.

51. **Definições.** — *Multiplicação é a operação que tem por fim, sendo dados dois números em certa ordem, tomar o primeiro como parcela tantas vêzes quantas são as unidades do segundo.*

Indica-se a multiplicação com o sinal $\times$, que se lê *multiplicado por* ou *vêzes.* — Exemplo:

$$7 \times 4.$$

Pode-se indicar também a multiplicação com um simples ponto colocado entre os fatôres. — Exemplo:

$$8 . 5.$$

Quando os números são representados por letras, não se costuma empregar sinal algum entre elas para indicar a multipli-

cação. Assim, a multiplicação de um número qualquer a por outro b representa-se do modo seguinte:

$$ab.$$

Os números dados na multiplicação denominam-se *fatôres.* O primeiro dêles chama-se *multiplicando* e o segundo *multiplicador.* O resultado da multiplicação é o *produto.*

Assim, na igualdade

$$6 \times 3 = 18,$$

6 e 3 são os fatôres, 6 é o multiplicando, 3 o multiplicador e 18 o produto.

52. **Propriedade comutativa.** — *A ordem dos fatôres não altera o produto.*

Com efeito, considerando os fatôres 4 e 3, temos

$$4 \times 3 = 4 + 4 + 4 = 12$$
$$3 \times 4 = 3 + 3 + 3 + 3 = 12,$$

isto, é

$$4 \times 3 \;=\; 3 \times 4.$$

53. **Casos particulares.** — 1.º *O produto de um número qualquer por zero é igual a zero.*

Consideremos o produto

$$5 \times 0 \quad \text{ou} \quad 0 \times 5.$$

De acôrdo com a definição, podemos escrever

$$0 \times 5 = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0.$$

Temos, então,

$$0 \times 5 = 0 \quad \text{ou} \quad 5 \times 0 = 0.$$

Em geral, representando por a um número qualquer, temos

$$a \times 0 = 0$$
$$0 \times a = 0.$$

Assim, para que um produto de dois fatôres seja nulo, basta que um dêles o seja.

2.º *O produto de um número qualquer por um é igual ao próprio número.*

Com efeito, dado o produto

$$3 \times 1 \quad \text{ou} \quad 1 \times 3,$$

temos

$$1 \times 3 = 1 + 1 + 1 = 3.$$

De modo geral, podemos escrever

$$a \times 1 = a$$
$$1 \times a = a.$$

54. Prática da multiplicação. — I. Consideremos primeiramente a multiplicação de números de um só algarismo.

Seja efetuar o produto

$$5 \times 3.$$

Conforme a definição, temos

$$5 \times 3 = 5 + 5 + 5 = 15.$$

Entretanto, na prática, não precisamos proceder dêsse modo, por isso que guardamos de memória os produtos de números de um só algarismo, os quais são dados pela tabela de Pitágoras ou *tabuada de multiplicar.*

II. Tratemos agora da multiplicação de um número de mais de um algarismo por um número de um só algarismo.

Seja efetuar o produto

$$352 \times 3.$$

De acôrdo com a definição, temos

$$352 \times 3 = 352 + 352 + 352 = 1\,056.$$

Para efetuar essa soma poderíamos aplicar a conhecida regra. Entretanto, como os algarismos de mesma ordem das parcelas são iguais, preferimos proceder do modo seguinte:

$$\begin{array}{lcl} 2 \text{ unidades} \times 3 = & 6 & \text{unidades} \\ 5 \text{ dezenas} \times 3 = & 15 & \text{dezenas} \\ 3 \text{ centenas} \times 3 = & 9 & \text{centenas.} \end{array}$$

Assim, para obter o resultado, basta multiplicar por 3 as unidades, dezenas e centenas do multiplicando e somar depois os produtos obtidos.

Entretanto, na prática dispõe-se a operação escrevendo uma só vez o multiplicando e indicando pelo multiplicador, sob êle escrito, o número de parcelas que devem ser tomadas.

$$\boxed{\begin{array}{r} 352 \\ 3 \\ \hline 1\,056 \end{array}}$$

Dizemos, então: 3 vêzes 2, seis, escrevemos 6 e prosseguimos; 3 vêzes 5, quinze; escrevemos 5 e retemos 1; 3 vêzes 3, nove; 9 mais 1, dez: escrevemos 10. Encontra-se dêsse modo o produto, 1 056.

Observações: 1.ª Quando o multiplicador é formado da unidade seguida de zeros, para obter o produto basta escrever à direita do multiplicando tantos zeros quantos contém o multiplicador. — Exemplo:

$$245 \times 100 = 24\,500.$$

2.ª Quando o multiplicador é formado de um algarismo significativo seguido de zeros, para obter o produto basta multiplicar o algarismo significativo pelo multiplicando e escrever à direita do produto obtido tantos zeros quantos contém o multiplicador. — Exemplo:

$$128 \times 300 = 38\,400.$$

III. Consideremos finalmente a multiplicação de números de mais de um algarismo.

Seja efetuar o produto

$$587 \times 246.$$

Conforme a definição, o produto procurado é a soma de 246 parcelas iguais a 585.

A fim de facilitar essa adição, podemos grupar as parcelas em somas parciais e depois somar os totais encontrados.

Consideramos, então, três grupos de parcelas iguais ao multiplicando, tendo o primeiro seis, o segundo quarenta e o terceiro duzentas.

E, para obter a soma de parcelas iguais de cada grupo, podemos proceder do modo seguinte:

$$\begin{array}{r} 587 \times \quad 6 = \quad 3\,522 \\ 587 \times \quad 40 = \quad 23\,480 \\ 587 \times 200 = 117\,400. \end{array}$$

Os resultados encontrados denominam-se *produtos parciais.* Somando-os, obteremos o resultado procurado. — Assim:

$$587 \times 246 = 3\,522 + 23\,480 + 117\,400 = 144\,402.$$

Na prática, pode-se proceder do modo seguinte: escreve-se apenas uma vez o multiplicando e o multiplicador. Sob o traço, escrevem-se os produtos parciais obtidos, com cuidado de que fiquem colocadas em coluna as unidades de mesma ordem de cada um dêles. Sob o segundo traço, escreve-se a soma dos produtos parciais obtidos.

587
246
3 522
23 480
117 400
144 402

Pode-se deixar de escrever os zeros que se encontram à direita dos produtos parciais a partir do segundo, desde que os mesmos fiquem dispostos como se nêles figurassem os zeros.

55. **Regra.** — *Para multiplicar um número de vários algarismos por outro, multiplicam-se sucessivamente as unidades de cada ordem do multiplicando, a partir das unidades simples, pelas unidades de cada ordem do multiplicador, colocando-se cada um dos produtos parciais de modo que o último algarismo à direita fique colocado na mesma coluna que o correspondente do multiplicador; somam-se depois os produtos parciais obtidos.*

Se houver um ou mais zeros entre os algarismos do multiplicador, deve-se ter o cuidado de escrever o primeiro algarismo à direita de cada produto parcial proveniente do algarismo significativo do multiplicador que se seguir ao zero na mesma coluna a que pertence êsse algarismo. Evita-se, dêsse modo, o trabalho de escrever os zeros provenientes do produto do multiplicando por zero.

Exemplos:

9 542	3 565
237	2 508
66 794	28 520
286 26	1 782 5
1 908 4	7 130
2 261 454	8 941 020

56. **Observação.** — Quando um ou ambos os fatôres forem formados de algarismos significativos seguidos de zeros, efetua-se a multiplicação dos números formados pelos algarismos significativos de ambos, escrevendo-se à direita do produto obtido tantos zeros quantos houver à direita de um ou de ambos os fatôres.

57. **Prova da multiplicação.** — Pode-se obter a prova da multiplicação do modo seguinte: inverte-se a ordem dos fatôres e

efetua-se novamente a operação; de acôrdo com a propriedade comutativa, o segundo resultado deve ser igual ao primeiro. — Exemplo:

235	412
412	235
470	2 060
2 35	12 36
94 0	82 4
96 820	96 820.

58. **Produto de vários fatôres.** — Dados vários números em certa ordem, chama-se *produto* dêsses números o resultado que se obtém multiplicando o primeiro pelo segundo, o produto obtido pelo terceiro, o novo produto pelo quarto, e assim por diante, até o último.

Assim, a expressão

$$2 \times 5 \times 4 \times 3$$

indica que se devem efetuar com os números que nela figuram as operações seguintes:

$$2 \times 5 = 10; \quad 10 \times 4 = 40; \quad 40 \times 3 = 120.$$

59. **Propriedades.** — I. *O produto de vários fatôres não se altera quando se modifica de um modo qualquer a ordem dos mesmos.* (Propriedade comutativa).

Exemplo:

$$5 \times 3 \times 7 = 5 \times 7 \times 3 = 3 \times 7 \times 5.$$

II. *O produto de vários fatôres não se altera quando se substituem dois ou mais dentre êles pelo seu produto efetuado.* (Propriedade associativa).

Exemplo:

$$6 \times 7 \times 4 \times 3 = (6 \times 7) \times 4 \times 3 = 504.$$

De acôrdo com a segunda propriedade, para multiplicar um produto de vários fatôres por um número qualquer, basta multiplicar um dos fatôres por êsse número.

60. **Produto de uma soma por um número.** — *Para multiplicar uma soma indicada por um número pode-se multiplicar cada têrmo da soma por êsse número e somar os resultados obtidos.*

Seja efetuar o produto

$$(6+4)\times 3.$$

Conforme a definição de multiplicação, temos

$$(6+4)\times 3=(6+4)+(6+4)+(6+4).$$

Suprimindo os parênteses, vem

$$(6+4)\times 3=6+4+6+4+6+4=$$
$$=6+6+6+4+4+4.$$

Verificamos, assim, que

$$(6+4)\times 3=6\times 3+4\times 3=18+12=30.$$

61. **Produto de uma diferença por um número.** — *Para multiplicar uma diferença indicada por um número pode-se multiplicar cada têrmo da diferença por êsse número e subtrair os resultados obtidos.*

Exemplo:

$$(10-6)\times 5=10\times 5-6\times 5=50-30=20.$$

62. **Produto de uma soma por outra.** — *Para multiplicar uma soma indicada por outra pode-se multiplicar sucessivamente os têrmos da primeira por cada um dos têrmos da segunda e somar os resultados obtidos.*

Exemplo:

$$(5+2)(4+3)=5\times 4+2\times 4+5\times 3+2\times 3=$$
$$=20+8+15+6=49.$$

63. **Cálculo abreviado.** — Aplicando os princípios estudados, pode-se abreviar o cálculo na multiplicação.

A seguir, daremos alguns exemplos de casos simples que se apresentam com freqüência na prática.

I. *Decomposição de um dos fatôres em soma ou diferença.*

$$42\times 5=(40+2)\times 5=40\times 5+2\times 5=200+10=210.$$
$$58\times 6=(60-2)\times 6=60\times 6-2\times 6=360-12=348.$$

II. *Casos especiais.* — Consideramos os seguintes, que se apresentam freqüentemente na prática.

a) *Multiplicação por 4.*

Notando que $4=2\times 2$, temos

$$45\times 4=45\times 2\times 2=90\times 2=180.$$
$$163\times 4=163\times 2\times 2=326\times 2=652.$$

b) *Multiplicação por 9.*

Notando que $9=10-1$, temos

$$28\times 9=28\times(10-1)=28\times 10-28=280-28=252,$$
$$132\times 9=132\times(10-1)=132\times 10-132=$$
$$=1\,320-132=1\,188.$$

c) *Multiplicação por 11.*

Notando que $11=10+1$, temos

$$37\times 11=37\times(10+1)=37\times 10+37\times 1=370+37=407.$$
$$242\times 11=242\times(10+1)=242\times 10+242\times 1=$$
$$=2\,420+242=2\,662.$$

d) *Multiplicação por 19.*

Notando que $19=20-1$, temos

$$34\times 19=34\times(20-1)=34\times 20-34\times 1=680-34=646.$$
$$263\times 19=263\times(20-1)=$$
$$=263\times 20-263=5\,260-263=4\,997.$$

e) *Multiplicação por 21.*

Notando que $21=20+1$, temos

$$243\times 21=243\times(20+1)=$$
$$=243\times 20+243=4\,860+243=5\,103.$$

f) *Multiplicação por 99.*

Notando que $99=100-1$, temos

$$242\times 99=242\times(100-1)=$$
$$=242\times 100-242=24\,200-242=23\,958.$$

g) *Multiplicação por 101.*

Notando que $101 = 100 + 1$, temos

$$524 \times 101 = 524 \times (100 + 1) = 524 \times 100 + 524 = 52\,924.$$

64. **Observação.** — Além dos casos especiais que examinamos outros muitos podem ser considerados.

No capítulo que segue, ao tratar da divisão, voltaremos ainda sôbre êles.

65. **Potências.** — Consideremos o produto

$$2 \times 2 \times 2 \times 2,$$

no qual os fatôres são iguais.

Os produtos de fatôres iguais denominam-se *potências.*

Assim, dado o produto

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16,$$

dizemos que 16 é potência de 2.

66. **Definições.** — *Potência de um número é um produto de fatôres iguais a êsse número.*

O fator que se repete chama-se *base* e o número dos fatôres iguais que são tomados denomina-se *grau* da potência.

Exemplo: dada a igualdade

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81,$$

dizemos que 81 é a potência do quarto grau de 3. Nessa potência, 3 é a base e 4 é o grau.

A operação mediante a qual se obtém a potência de um número chama-se elevação à potência ou *potenciação.*

67. **Notação.** — As potências são representadas simbòlicamente, escrevendo-se a base e indicando-se o grau correspondente com um número, chamado *expoente,* escrito em algarismos menores do que a base e colocado um pouco acima dela, à direita. — Exemplo:

$$4 \times 4 \times 4 = 64 = 4^3.$$

68. **Observações.** — 1.ª A segunda potência de um número recebe a denominação de *quadrado* dêsse número.

Exemplo: dada a igualdade

$$3^2 = 9,$$

dizemos que 9 é o quadrado de 3.

2.ª A terceira potência de um número chama-se *cubo* dêsse número.

Exemplo: dada a igualdade

$$2^3 = 8,$$

diz-se que 8 é o cubo de 2.

3.ª Considera-se, por convenção, um número qualquer como elevado à potência de grau um. — Exemplos:

$$3^1 = 3, \quad 5^1 = 5, \quad a^1 = a.$$

Não se usa, porém, escrever o expoente um, o qual fica subentendido.

69. **Potências de um.** — *Qualquer potência de um é igual a um.*

Com efeito, temos

$$1^2 = 1 \times 1 = 1$$
$$1^3 = 1 \times 1 \times 1 = 1$$
$$1^4 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1, \text{ e assim sucessivamente.}$$

De modo geral, representando por n um número inteiro qualquer temos:

$$1^n = 1.$$

70. **Potências de dez.** — *As potências de dez são formadas pela unidade seguida de tantos zeros quantas forem as unidades do expoente.*

Com efeito, temos

$$10^1 = 10$$
$$10^2 = 10 \times 10 = 100$$
$$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1\,000, \text{ e assim sucessivamente.}$$

71. **Produto de potências da mesma base.** — *Para se obter o produto de potências da mesma base, conserva-se a base comum e toma-se como expoente a soma dos expoentes das potências dadas.*

Seja efetuar o produto

$$2^2 \times 2^3.$$

De acôrdo com a definição, temos

$$2^2 = 2 \times 2,$$

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2.$$

Portanto:

$$2^2 \times 2^3 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5.$$

Temos, assim,

$$2^2 \times 2^3 = 2^{2+3} = 2^5.$$

Consideremos mais alguns exemplos:

$$5^2 \times 5^3 \times 5^4 = 5^9.$$

$$7 \times 7^2 \times 7^3 \times 7^4 = 7^{10}.$$

72. **Quociente de potências da mesma base.** — *Para se obter o quociente de duas potências da mesma base, conserva-se a base comum e toma-se como expoente a diferença entre o expoente do dividendo e o do divisor.*

Seja efetuar a divisão

$$2^5 : 2^3.$$

De acôrdo com a definição de divisão, devemos procurar o número que se deve multiplicar pelo divisor para obter o dividendo.

Assim, por ser

$$2^2 \times 2^3 = 2^{2+3} = 2^5,$$

concluímos que

$$2^5 : 2^3 = 2^{5-3} = 2^2.$$

Anàlogamente, temos, nos exemplos que seguem:

$$5^4 : 5 = 5^{4-1} = 5^3,$$

$$7^6 : 7^3 = 7^{6-3} = 7^3.$$

73. **Exercícios resolvidos.** — 1.º *Quantos segundos há em 5 dias?*

Resolução:

Notando que o dia tem 24 horas, que a hora tem 60 minutos e o minuto 60 segundos, vem

$$1 \text{ dia} = 24 \times 60 \times 60 \text{ s} = 86\,400 \text{ s}.$$

Temos então

$$5 \text{ dias} = 86\,400 \times 5 \text{ s} = 432\,000 \text{ s}.$$

2.º *Um operário ganha 6 cruzeiros por hora de trabalho. Quanto perceberá trabalhando em regime de 8 horas por dia durante 12 dias e 5 horas?*

Resolução:

Em um dia de trabalho o operário ganha

Cr\$ 6,00 × 8 = Cr\$ 48,00.

Em 12 dias e 5 horas ganhará

Cr\$ 48,00 × 12 = Cr\$ 576,00
Cr\$ 6,00 × 5 = Cr\$ 30,00

Total = Cr\$ 606,00.

3.º *Quantos algarismos devemos escrever para representar a sucessão natural dos números desde 1 a 250?*

Resolução:

Para os 9 primeiros escrevemos	9
Para os 90 seguintes escrevemos 90 × 2 = ...	180
Para os restantes (250 — 99) escrevemos 151 × 3 = ..	453
Total de algarismos escritos: 9 + 180 + 453 = ...	642.

74. **Exercícios propostos.**

Efetuar mentalmente as multiplicações seguintes:

1. 342 × 2	R. 684.	5. 120 × 9	R. 1 080.
2. 561 × 3	R. 1 683.	6. 71 × 11	R. 781.
3. 235 × 4	R. 940.	7. 30 × 19	R. 570.
4. 312 × 20	R. 6 240.	8. 52 × 21	R. 1 092.

Calcular as expressões seguintes:

9. (34 + 45) × 25 — R. 1 975.
10. (57 − 32) × 18 — R. 450.
11. (21 + 17 + 30) × 15 — R. 1 020.
12. (30 + 27 − 15) × 21 — R. 882.
13. (12 + 15) × (21 + 16) — R. 999.

14. $18 \times 5 + 130 \times 3 + 21 \times 4$ R. 564.

15. $(40 - 12) \times 3 + 17 \times 6$ R. 186.

16. $(8 \times 5 - 36) \times 5 - 3 \times (18 - 3 \times 5)$ R. 11.

17. $(14 + 8) \times (21 + 5) - (23 - 9) \times 6$ R. 488.

18. $(21 + 12)(19 + 16) - (18 + 7)(15 + 12)$ R. 480.

Resolver os problemas seguintes:

19. Quantos segundos há em 3 horas? R. 10 800 s.

20. Quantos minutos há em 5 dias? R. 7 200 min.

21. Quantos algarismos precisamos escrever para representar todos os números de três algarismos? R. 2 700.

22. Quantos algarismos precisamos escrever para representar a sucessão dos números naturais desde 1 até 500? R. 1 392.

23. Quantos algarismos são utilizados na numeração das 285 páginas de um livro? R. 747.

24. Quantos algarismos são necessários para escrever a sucessão dos números naturais desde 50 até 2 500? R. 8 804.

25. O som percorre 340 metros por segundo. Que distância percorre em 5 minutos? R. 102 000 m.

26. Quantos segundos há em 4 horas e 18 minutos? R. 15 480 s.

27. Um operário ganha 7 cruzeiros por hora de trabalho. Quanto deverá perceber em 4 semanas, trabalhando 8 horas por dia e 6 dias por semana? R. Cr$ 1 344,00.

28. Em uma usina trabalham 32 operários no horário de 7 às 11 e de 13 às 17. Ganhando cada um 6 cruzeiros por hora, quanto lhes pagará o proprietário por 12 dias de trabalho? R. Cr$ 18 432,00.

29. Dado um produto de dois fatôres, se multiplicarmos o primeiro por 5 e o segundo por 3 que alteração haverá no produto? R. Fica multiplicado por 15.

30. Que alteração sofre um produto de três fatôres se multiplicarmos cada fator por 2? R. Fica multiplicado por 8.

31. Sabendo-se que o produto de dois números é 360, calcular o produto de um número 3 vêzes maior que o primeiro por um número 5 vêzes maior que o segundo. R. 5 400.

32. Que alteração sofre o produto

$$258 \times 132$$

quando se adicionam 3 unidades ao multiplicando? R. Aumenta de 396.

33. Que alteração sofre o produto

$$325 \times 438$$

se adicionarmos 5 unidades ao multiplicador? R. Aumenta de 1 625.

34. Que alteração sofre o produto

$$249 \times 527$$

quando se subtraem 3 unidades do multiplicando? R. Diminui de 1 581.

35. A soma de dois números é 30. Se multiplicarmos êsses números por 6, que alteração haverá na soma? R. Aumenta de 180.

36. A soma de dois números é 127. Se multiplicarmos êsses números por 8, de quanto a nova soma excederá a primeira? R. De 889.

37. Que alteração sofre o produto

$$7 \times a$$

se adicionarmos 3 unidades ao muliplicando? R. Aumenta de $3 \times a$.

38. Que alteração sofre o produto

$$a \times 10$$

se adicionarmos 5 unidades ao multiplicador? R. Aumenta de $5 \times a$.

39. Qual a propriedade aplicada na multiplicação

$5 \times 6 \times 7 \times 8 = 30 \times 7 \times 8$? R. Associativa.

40. Que propriedade justifica a igualdade

$a \times b \times c = c \times a \times b$? R. Comutativa.

CAPÍTULO VI

DIVISÃO DE NÚMEROS INTEIROS

75. **Noção de divisão.** — Procuremos resolver, mediante as operações até agora estudadas, o problema enunciado a seguir.

Possuindo um estudante 50 cruzeiros, quantos livros poderá comprar se cada um custa 15 cruzeiros?

Como o preço de cada livro é Cr$ 15,00, para obter a solução procurada devemos subtrair 15 cruzeiros de 50 cruzeiros quantas vêzes fôr possível.

Temos, então,

$$50 - 15 - 15 - 15 = 5.$$

Evidentemente, com os 5 cruzeiros que restaram após a compra do terceiro livro, nenhum outro poderá comprar o estudante, pois o preço de cada livro é Cr$ 15,00.

Assim, com 50 cruzeiros podem ser adquiridos 3 livros, restando dessa compra 5 cruzeiros.

O conjunto das subtrações efetuadas na resolução do problema proposto constitui uma *divisão*.

O primeiro número dado chama-se *dividendo* e o segundo *divisor*. O número de subtrações efetuadas (3) denomina-se *quociente* e o resto obtido na última (5) é o *resto* da divisão.

Assim, o quociente da divisão indica quantas vêzes o divisor está contido no dividendo.

76. **Expressão do dividendo.** — As subtrações sucessivas indicadas no exemplo considerado,

$$50 - 15 - 15 - 15 = 5,$$

podem ser obtidas do modo seguinte:

$$50 - (15 + 15 + 15) = 5,$$
$$50 - 15 \times 3 = 5.$$

Concluímos, então, que o resto da divisão é o excesso do dividendo sôbre o produto do divisor pelo quociente.

Em conseqüência, a igualdade anterior pode ser posta sob a forma

$$50 = 15 \times 3 + 5,$$

a qual exprime a lei fundamental da divisão:

O dividendo é igual ao produto do divisor pelo quociente mais o resto.

De modo geral, designando por a o dividendo, b o divisor, q o quociente e r o resto da divisão, temos

$$a = b \times q + r,$$

sendo $r < b$.

77. **Divisão aproximada.** — *Divisão é a operação que tem por fim, sendo dados dois números em certa ordem, procurar o maior número de vêzes que o segundo está contido no primeiro.*

Indica-se a divisão com os sinais : ou ÷, os quais significam *dividido por.* — Exemplo:

$$12 : 4 \quad \text{ou} \quad 12 \div 4.$$

A divisão pode ser também indicada mediante um traço horizontal colocado entre o dividendo e o divisor. — Exemplo:

$$\frac{12}{4}.$$

78. **Divisão exata.** — Conforme a definição, o resto da divisão é sempre menor que o divisor. Se o resto é igual a zero, a divisão é exata.

Na divisão exata, *o dividendo é igual ao produto do divisor pelo quociente.*

Assim, a divisão exata consiste em, dado o produto de dois fatôres e um dêles, achar o outro. O produto dado é o *dividendo,* o fator dado é o *divisor* e o fator procurado é o *quociente.*

Exemplo: sendo

$$12 = 4 \times 3,$$

temos

$$12 : 4 = 3 \quad \text{ou} \quad 12 : 3 = 4.$$

A divisão exata pode ser considerada como *operação inversa* da multiplicação.

79. **Observação.** — Na divisão podem ser considerados dois problemas distintos.

I. *Quantos livros poderemos comprar com 48 cruzeiros se o preço de cada um é 16 cruzeiros?*

Procurando quantas vêzes 48 cruzeiros contêm 16 cruzeiros, encontramos 3.

De acôrdo com o enunciado do problema, o quociente obtido refere-se a *livros.*

II. *Compraram-se 3 livros do mesmo preço por 54 cruzeiros; quanto custou cada livro?*

Para resolver o problema devemos repartir 54 cruzeiros em 3 partes iguais.

O quociente que se obtém (18) é da mesma espécie do dividendo e deve ser, por isso mesmo, referido a *cruzeiros.*

80. **Casos especiais.** — I. *Quando o divisor é um, o quociente é igual ao dividendo.*

Com efeito, sendo

$$3 \times 1 = 3,$$

segue-se que

$$3 : 1 = 3.$$

De modo geral, temos

$$a : 1 = a.$$

II. *Quando o dividendo é igual ao divisor, o quociente é igual a um.*

Notando que

$$1 \times 7 = 7,$$

concluímos que

$$7 : 7 = 1.$$

Em geral, temos

$$a : a = 1.$$

III. *Quando o dividendo é zero e o divisor diferente de zero, o quociente é igual a zero.*

Tendo em vista que

$$0 \times 4 = 0,$$

podemos escrever

$$0 : 4 = 0.$$

Em geral, temos

$$0 : a = 0.$$

81. **Propriedade do quociente.** — *Multiplicando-se ou dividindo-se o dividendo e o divisor pelo mesmo número, o quociente não se altera.*

Exemplo: dado o quociente

$$18 : 6 = 3,$$

temos

$$\frac{18 \times 2}{6 \times 2} = 3 \quad \text{ou} \quad \frac{18 : 2}{6 : 2} = 3.$$

Nas divisões não exatas, a multiplicação ou divisão do dividendo e do divisor pelo mesmo número também não altera o quociente, *mas o resto fica multiplicado ou dividido por êsse número.*

Exemplo: nas divisões

$$22 : 4 \quad \text{e} \quad 22 \times 3 : 4 \times 3,$$

temos, respectivamente,

$$22 = 4 \times 5 + 2$$

$$66 = 12 \times 5 + 6,$$

sendo em ambas o quociente igual a 5, o resto da primeira 2 e o da segunda $2 \times 3 = 6$.

82. **Divisão de uma soma por um número.** — *Para se dividir uma soma indicada por um número, pode-se dividir cada parcela da soma pelo número e somar os resultados obtidos.*

Assim, admitindo que as divisões das parcelas pelo divisor sejam exatas, temos

$$(12 + 15) : 3 = (12 : 3) + (15 : 3) =$$
$$= 4 + 5 = 9.$$

83. **Divisão de uma diferença por um número.** — *Para se dividir uma diferença indicada por um número, pode-se dividir cada têrmo da diferença pelo número e subtrair os resultados obtidos.*

Exemplo: dada a divisão

$$(18 - 12) : 3,$$

em que as divisões dos têrmos da subtração pelo divisor são exatas, temos

$$(18 - 12) : 3 = (18 : 3) - (12 : 3) = 6 - 4 = 2.$$

84. Divisão de um produto por um número. — *Para se dividir um produto indicado por um número, pode-se dividir um dos fatôres por êsse número e conservar os demais.*

Exemplo:

$$(6 \times 5 \times 12) : 4 = 6 \times 5 \times (12 : 4) = 6 \times 5 \times 3 = 90.$$

85. Divisão de um número por um produto. — *Para se dividir um número por um produto indicado, pode-se dividir êsse número pelo primeiro fator, o quociente obtido pelo segundo, e assim por diante, até o último.*

Exemplo:

$$48 : (3 \times 4) = (48 : 3) : 4 = 16 : 4 = 4.$$

86. Prática da divisão. — I. Iniciemos nosso estudo pelo caso mais simples, em que o divisor e o quociente são números de um só algarismo.

Seja efetuar a divisão

$$60 : 9.$$

Se procurarmos os múltiplos sucessivos de 9, encontramos

$$9 \times 6 = 54 \quad \text{e} \quad 9 \times 7 = 63,$$

entre os quais está compreendido o dividendo.

Assim, conforme a definição, concluímos que 6 é o quociente da divisão proposta.

Para obter o resto, efetuamos a subtração seguinte:

$$60 - 6 \times 9 = 60 - 54 = 6.$$

Na prática, não temos necessidade de proceder dêsse modo, por isso que efetuamos mentalmente as divisões nas quais o divisor e o quociente são números de um só algarismo.

II. Consideremos agora o caso em que o divisor tem vários algarismos e o quociente apenas um.

Seja efetuar a divisão

$$315 : 64.$$

Para se obter o quociente, seria bastante procurar os múltiplos sucessivos de 64 até encontrar dois dêles entre os quais esteja compreendido o dividendo.

Assim procedendo, teríamos

$$64 \times 4 = 256 \quad \text{e} \quad 64 \times 5 = 320,$$

concluindo que 4 é o quociente procurado.

Entretanto, a fim de facilitar a operação, devemos procurar um meio de simplificar os ensaios.

Provisòriamente, consideremos o primeiro algarismo do divisor e os algarismos que representam unidades da mesma ordem no dividendo, para obter o quociente da divisão assim reduzida.

Dividindo 31 por 6, encontramos 5. A fim de verificar se realmente 5 é o quociente da divisão proposta, efetuamos o produto

$$64 \times 5 = 320.$$

Como êsse produto é maior que o dividendo (315), segue-se que o quociente ensaiado (5) é excessivo. Ensaiamos, então, o número 4, efetuando o produto

$$64 \times 4 = 256.$$

Sendo o produto assim obtido menor que o dividendo (315), segue-se que 4 é o quociente procurado.

315	64
256	4
59	

Na prática, dispomos a operação como se vê no quadro ao lado, sendo que, para abreviá-la ainda mais, poderemos efetuar mentalmente o produto do divisor pelo quociente e a subtração correspondente do dividendo.

III. Consideremos agora o caso da divisão de números quaisquer, em que o dividendo e o divisor têm vários algarismos, resolvendo o problema seguinte:

Deseja-se repartir a quantia de 5 849 cruzeiros, formada de 5 cédulas de mil cruzeiros, 8 de cem, 4 de dez e 9 moedas de um cruzeiro entre 23 pessoas. Quanto cabe a cada uma?

Sendo o número de cédulas de mil cruzeiros inferior ao de pessoas, precisamos, antes de iniciar a distribuição, trocá-las em cédulas de cem.

5 849	23
1 24	254
99	
7	

Ficamos, então, com

$$5 \times 10 + 8 = 50 + 8 = 58$$

cédulas de cem cruzeiros.

Repartindo-as entre os participantes da distribuição, isto é, efetuando a divisão

$$58 : 23,$$

verifica-se que cabem 2 cédulas de cem cruzeiros a cada pessoa, restando 12 cédulas.

Trocando as cédulas que sobraram em outras de dez cruzeiros, ficaremos com

$$12 \times 10 + 4 = 120 + 4 = 124$$

cédulas de dez cruzeiros.

Repartindo essas cédulas, a saber, efetuando a divisão

$$124 : 23,$$

verificamos que cabem 5 cédulas de dez cruzeiros a cada pessoa, restando 9.

Trocando as 9 cédulas que sobraram em moedas de um cruzeiro, ficaremos com

$$9 \times 10 + 9 = 90 + 9 = 99$$

moedas de um cruzeiro.

Efetuando a divisão

$$99 : 23,$$

verificamos que cabem a cada pessoa 4 moedas de um cruzeiro e sobram 7.

Na distribuição da quantia dada, cada pessoa recebeu 2 cédulas de cem cruzeiros, 5 de dez e 4 moedas de um cruzeiro, sendo 7 o número de moedas não distribuídas.

Assim, na divisão

$$5\,849 : 23,$$

o quociente é 254 e o resto 7.

Com efeito, temos

$$5\,849 = 23 \times 254 + 7.$$

87. **Regra.** — *Separam-se no dividendo, a partir da esquerda, os algarismos necessários para formar um número que contenha o divisor pelo menos uma vez e menos de dez vêzes; divide-se êsse número pelo divisor; multiplica-se o quociente obtido pelo divisor e subtrai-se êsse produto do dividendo parcial considerado; à direita do resto, escreve-se o algarismo seguinte do dividendo, formando-se novo dividendo parcial; divide-se êste pelo divisor e obtém-se o segundo algarismo do quociente.*

Repete-se a operação com o novo algarismo do quociente e assim prossegue-se, até ser considerado o último algarismo do dividendo.

Se algum dos dividendos parciais, a partir do segundo, fôr menor que o divisor, efetua-se a operação com o cuidado de acrescentar à sua direita um ou mais dos algarismos seguintes do dividendo, até torná-lo maior que o divisor e colocar no quociente tantos zeros quantos foram os algarismos acrescentados ao dividendo parcial considerado.

Exemplos:

```
1 663 272 | 367          31 679 236 | 9 875
  195 2   |------          2 054 2  |-------
   11 77    4 532           079 236    3 208
    0 762                     0 236
      028
```

88. **Casos particulares.** — I. *Para se dividir um número formado de algarismos significativos seguidos de zeros pela unidade seguida de igual ou menor número de zeros é bastante suprimir à direita do dividendo tantos zeros quantos contém o divisor.*

Exemplo:

$$13\,200 : 100 = 132.$$

Com efeito, temos

$$100 \times 132 = 13\,200.$$

II. *Para se dividir um número qualquer pela unidade seguida de zeros é bastante separar à direita do número tantos algarismos quantos zeros contém o divisor. O número separado à esquerda é o quociente e o número separado à direita é o resto da divisão.*

Exemplo: na divisão

$$5\,318 : 100,$$

o quociente é 53 e o resto 18.

Com efeito, temos

$$5\,318 = 100 \times 53 + 18.$$

89. **Prova da divisão.** — Pode-se obter a prova da divisão multiplicando o divisor pelo quociente e somando o resto, se houver.

De acôrdo com a lei fundamental da divisão, o resultado obtido mediante essas operações deve ser igual ao dividendo.

90. **Cálculo abreviado e mental.** — Aplicando os princípios até aqui estudados, em certos casos podemos abreviar a divisão e efetuá-la mentalmente.

A seguir, damos algumas indicações sôbre o modo de proceder segundo os casos que se apresentarem.

I. *Decomposição do dividendo.*

Exemplo:

$$275 : 25 = (250 + 25) : 25 = 10 + 1 = 11.$$

II. *Divisão por 5.*

Notando que $5 = 10 : 2$, temos

$$165 : 5 = 165 \times 2 : 10 = 330 : 10 = 33.$$

III. *Divisão por 25.*

Notando que $25 = 100 : 4$, temos

$$325 : 25 = 325 \times 4 : 100 = 1\,300 : 100 = 13.$$

IV. *Divisão por 125.*

Notando que $125 = 1\,000 : 8$, temos

$$4\,000 : 125 = 4\,000 \times 8 : 1\,000 = 32\,000 : 1\,000 = 32.$$

91. **Multiplicações abreviadas.** — Empregando a divisão, podemos abreviar em certos casos a multiplicação, como se verá nos exemplos dados a seguir.

I. *Multiplicação por 25.*

Notando que $25 = 100 : 4$, temos

$$78 \times 25 = 78 \times 100 : 4 = 7\,800 : 4 = 1\,950.$$

II. *Multiplicação por 125.*

Notando que $125 = 1\,000 : 8$, vem

$$64 \times 125 = 64 \times 1\,000 : 8 = 64\,000 : 8 = 8\,000.$$

92. **Exercícios resolvidos.** — 1.º *Quinze metros de sêda custam Cr\$ 1 080,00. Quanto custarão 18 metros?*

Se 15 metros de sêda custam Cr\$ 1 080,00, um metro custará

$$\text{Cr\$ } 1\,080{,}00 : 15 = \text{Cr\$ } 72{,}00.$$

Sendo 72 cruzeiros o preço de cada metro, 18 metros custarão

$$\text{Cr\$ } 72{,}00 \times 18 = \text{Cr\$ } 1\,296{,}00.$$

2.º *Qual é o número que dividido por 8 dá o quociente 13 e o resto 3?*

Sendo o dividendo igual ao produto do divisor pelo quociente mais o resto, temos

$$8 \times 13 + 3 = 104 + 3 = 107.$$

Com efeito, na divisão

$$107 : 8$$

o quociente é 13 e o resto 3.

3.º *Repartir 320 cruzeiros entre duas pessoas, de modo que uma delas receba três vêzes mais do que a outra.*

Tomando como unidade a parte menor, uma das pessoas deve receber uma vez essa parte e a outra três vêzes.

Temos, então,

$$1 \text{ vez a parte menor} + 3 \text{ vêzes a parte menor} = \text{Cr\$ } 320{,}00.$$

isto é,

$$4 \text{ vêzes a parte menor} = \text{Cr\$ } 320{,}00.$$

A parte menor será, portanto,

$$\text{Cr\$ } 320{,}00 : 4 = \text{Cr\$ } 80{,}00.$$

A parte maior será

$$\text{Cr\$ } 80{,}00 \times 3 = \text{Cr\$ } 240{,}00.$$

4.º *Em uma oficina trabalharam três operários, o primeiro durante 3 dias, o segundo 5 dias e o terceiro 7 dias, percebendo juntos a quantia de 900 cruzeiros. Quanto cabe a cada um?*

O valor do trabalho corresponde a

$$3 + 5 + 7 = 15 \text{ dias}.$$

Assim, um dia de trabalho vale

$$\text{Cr\$ } 900{,}00 : 15 = \text{Cr\$ } 60{,}00.$$

A quantia dada será, portanto, distribuída do modo seguinte:

ao primeiro	Cr\$ 60,00 × 3 = Cr\$ 180,00,
ao segundo	Cr\$ 60,00 × 5 = Cr\$ 300,00,
ao terceiro	Cr\$ 60,00 × 7 = Cr\$ 420,00.

93. Exercícios propostos.

Efetuar mentalmente as divisões seguintes:

1. 420 : 4.	R. 105.	6. 450 : 30.	R. 15.
2. 210 : 5.	R. 42.	7. 1 600 : 200.	R. 8.
3. 300 : 25.	R. 12.	8. 3 900 : 300.	R. 13.
4. 750 : 125.	R. 6.	9. 6 000 : 500.	R. 12.
5. 360 : 20.	R. 18.	10. 2 000 : 250.	R. 8.

Calcular as expressões seguintes:

11. $(50 + 75) : 25$. R. 5.
12. $(108 - 54) : 9$. R. 6.
13. $(90 + 120 + 150) : 30$. R. 12.
14. $(105 + 224 - 84) : 7$. R. 35.
15. $18 \times 3 + 32 : 4 - 5 \times 8$. R. 22.
16. $144 : 12 - 4 \times 5 : 10 + 5 \times 9$. R. 55.
17. $450 : (2 \times 3 \times 5) - 18 : 3$. R. 9.
18. $(84 + 132 - 180) : 12 + 60 : (5 \times 3)$. R. 7.
19. $210 : (2 \times 3 \times 7) + (72 - 48) : 12 + 3$. R. 10.
20. $8 \times (25 + 16 : 4 - 12) - (18 : 3 + 9 - 6) \times 15$. R. 1.

Resolver os problemas seguintes:

21. Calcular o preço de um metro de certo tecido, sabendo-se que 12 metros custam 336 cruzeiros. R. Cr$ 28,00.
22. Achar o número pelo qual se deve multiplicar 75 para obter como produto o número 9 600. R. 128.
23. Um automóvel demorou 5 horas para percorrer 310 quilômetros. Quantos quilômetros por hora percorreu em média? R. 62.
24. Um automóvel corre com a velocidade de 72 quilômetros por hora. Em que tempo percorrerá 432 quilômetros? R. 6 h.
25. Quantas horas há em 18 000 segundos? R. 5 h.
26. Quantos dias há em 11 520 minutos? R. 8 d.
27. Em uma divisão, o divisor é 17, o quociente 6 e o resto 12. Qual é o dividendo? R. 114.
28. Em uma divisão, o dividendo é 285, o quociente 8 e o resto 29. Qual é o divisor? R. 32.
29. Em uma divisão, o quociente é 21, o dividendo 275 e o divisor 13. Qual é o resto? R. 2.
30. Ao repartir 72 cruzeiros entre algumas pessoas verifica-se que, para dar 15 cruzeiros a cada uma, faltarão 3 cruzeiros. Quantas são as pessoas? R. 5.

31. Deseja-se repartir 52 cruzeiros entre várias pessoas. Se forem dados 3 cruzeiros a cada uma sobrará um cruzeiro. Quantas são as pessoas? R. 17.
32. Sendo Cr$ 300,00 o valor de 12 metros de certo tecido, quanto custarão 18 metros do mesmo tecido? R. Cr$ 450,00.
33. Um operário recebe 1 080 cruzeiros por 15 dias de trabalho. Quantos dias precisará trabalhar para ganhar 1 296 cruzeiros? R. 18 d.
34. Um negociante vende 25 latas de azeite. Se houvesse vendido 7 latas mais, obteria o lucro de 160 cruzeiros. Quanto ganha na venda de cada lata? R. Cr$ 5,00.
35. Dois automóveis partem no mesmo instante, um ao encontro do outro, de dois pontos opostos, distantes de 600 quilômetros. O primeiro percorre 55 quilômetros por hora e o segundo 65. Depois de quantas horas se encontrarão? R. 5 h.
36. Um automóvel, percorrendo 90 quilômetros por hora, parte 4 horas depois de outro que percorre 75 quilômetros por hora, na mesma direção. Em quanto tempo o segundo alcançará o primeiro? R. 20 h.
37. Uma pessoa possui atualmente 7 200 cruzeiros e outra 5 280; a primeira economiza em cada mês 360 cruzeiros e a segunda 600. No fim de quanto tempo terão quantias iguais? R. 8 m.
38. Repartir 480 cruzeiros entre duas pessoas de modo que uma delas receba o triplo do que a outra. Quanto cabe a cada uma? R. Cr$ 120,00 e Cr$ 360,00.
39. Procurar dois números, sabendo-se que a sua soma é 84 e que o quociente exato do maior pelo menor é 6. R. 72 e 12.
40. Procurar dois números, sabendo-se que a sua diferença é 75 e que o quociente exato do maior pelo menor é 6. R. 90 e 15.
41. Duas peças de pano com 25 metros cada uma custaram 800 cruzeiros. Sendo 18 cruzeiros o preço do metro de uma delas, qual o valor do metro da outra? R. Cr$ 14,00.
42. Um negociante vende 18 garrafas de vinho que havia comprado por 432 cruzeiros, ganhando ao vender 4 o custo de uma delas. Por quanto vende cada garrafa? R. Cr$ 30,00.
43. Um negociante recebe 5 caixas contendo cada uma 24 garrafas de vinho, as quais havia comprado por 1 800 cruzeiros. Ao retirar as garrafas das caixas verifica que 8 delas estão quebradas. Por quanto deve vender cada uma das restantes para obter o lucro de Cr$ 328,00. R. Cr$ 19,00.
44. Um fazendeiro comprou bois e cavalos, em igual número de cada espécie, por Cr$ 264 000,00. Sendo Cr$ 1 500,00 o preço de cada boi, Cr$ 1 800,00 o preço de cada cavalo, quantos animais de cada espécie comprou? R. 80.
45. Em uma oficina trabalharam três operários, o primeiro durante 6 dias, o segundo 9 dias e o terceiro 15 dias, percebendo juntos a quantia de 2 160 cruzeiros. Quanto cabe a cada um? R. Cr$ 432,00, Cr$ 648,00 e Cr$ 1 080,00.

46. Na numeração das páginas de um livro foram empregados 732 algarismos. Quantas páginas tem o livro? R. 280.

47. O produto de dois números é 240. Se somarmos 5 unidades ao primeiro, o produto passa a ser 340. Quais são os números? R. 12 e 20.

48. A soma de dois números é 208 e a diferença dos mesmos números é 42. Quais são os números? R. 125 e 83.

49. Calcular os têrmos de uma subtração, sabendo-se que a sua soma é 648 e que o subtraendo excede o resto de 106. R. 324, 215 e 109.

50. Em uma subtração, a soma do minuendo, subtraendo e resto é 180. Calcular o subtraendo, sabendo-se que o mesmo é igual à metade do resto. R. 30.

51. Em uma divisão, o divisor é igual ao quociente e o resto é o maior possível. Calcular o dividendo, sabendo-se que a soma do divisor com o quociente é 20. R. 109.

52. Em uma divisão, a soma do dividendo, divisor, quociente e resto é 292. Calcular o dividendo e o divisor, sabendo-se que o quociente é 14 e o resto 4. R. 256 e 18.

CAPÍTULO VII

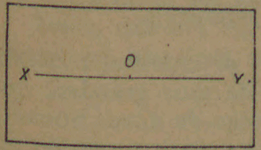
NÚMEROS RELATIVOS

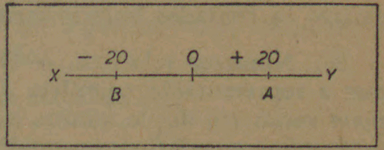
94. **Noção de número relativo.** — Nos capítulos anteriores consideramos grandezas cujas medidas podem ser expressas por números naturais.

Entretanto, outras há, como veremos a seguir, suscetíveis de avaliação em dois *sentidos opostos*. Evidentemente, para a representação dessas grandezas não bastam aquêles números. Precisam ser êles completados com a indicação do *sentido* em que devem ser avaliadas.

Consideremos um exemplo:

Dada uma reta sôbre a qual fixamos um ponto de referência O, procuremos marcar um ponto distante de 20 unidades do ponto O (1).





O número 20, que exprime a distância dada, não basta para a determinação do ponto procurado, pois há dois pontos, um situado à *direita* de O e o outro à *esquerda*, dêle distantes de 20 unidades.

É preciso, portanto, fixar o *sentido* em que deve ser tomada essa distância.

Convencionemos considerar *positivas* as distâncias marcadas à direita de O e *negativas* as que o são à sua esquerda.

Diremos então que o ponto A está situado a

$+20$ unidades e o ponto B a

-20 unidades do ponto O.

(1) As indispensáveis noções geométricas são dadas na aula de desenho, de acôrdo com os programas vigentes.

Evita-se, dêsse modo, qualquer ambigüidade na localização, relativamente ao ponto O, dos pontos pertencentes a XY.

Os números negativos são, assim, introduzidos no cálculo como ampliação do campo numérico para designar oposição de sentido.

95. **Grandezas suscetíveis de dois sentidos.** — Além da grandeza considerada no parágrafo precedente há muitas outras suscetíveis de variação em duplo sentido. Consideremos alguns exemplos.

As *temperaturas*, medidas pelos termômetros, podem ser consideradas em dois sentidos.

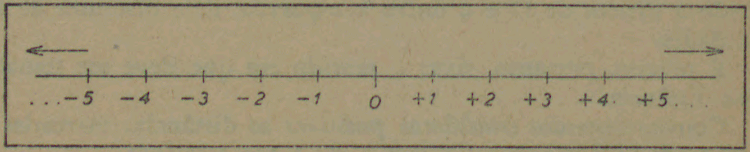
No termômetro centígrado, por exemplo, toma-se como referência a temperatura correspondente à do gêlo fundente.

Dando-se a essa temperatura a indicação de *zero grau*, os graus correspondentes a temperaturas *acima* de zero são representados por números *positivos* e os correspondentes a temperaturas *abaixo* de zero por números negativos.

Os *intervalos de tempo* são geralmente contados a partir de um instante inicial, tomado como origem.

Assim é que, estabelecendo o sentido do passado para o futuro como positivo, representaremos por números *positivos* os intervalos de tempo contados *posteriormente* e por números negativos os contados *anteriormente* àquela referência.

96. **Números relativos.** — Os exemplos precedentes mostram que a representação completa dos estados de uma grandeza que pode variar em duplo sentido exige o emprêgo de novos números — *os números relativos* ou qualificados — nos quais o sentido em que devem ser tomados vem indicado pelos sinais + ou — que os precedem.



Com a introdução dos números negativos a escala numérica pode ser considerada em dois sentidos opostos, de acôrdo com a representação gráfica vista acima.

97. **Definições.** — *Número positivo* é todo número, diferente de zero, precedido do sinal +. — Exemplo:

$$+7$$

Número negativo é todo número, diferente de zero, precedido do sinal —. Exemplo:

$$-3.$$

Ao zero, que não tem sinal, costuma-se dar a denominação de *número neutro.*

Os números positivos e negativos, inclusive zero, constituem a classe dos *números relativos* ou qualificados.

Valor absoluto ou *módulo* de um número relativo é o número que se obtém, suprimindo-lhe o sinal.

Dois números relativos são *iguais* quando têm o mesmo valor absoluto e o mesmo sinal.

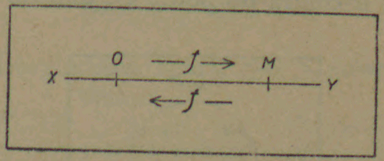
Dois números relativos são *simétricos* ou opostos quando têm o mesmo valor absoluto e sinais contrários.

98. **Segmentos orientados.** — Chama-se *segmento* tôda porção de reta limitada por dois pontos, denominados *extremos.*

Se associarmos a qualquer segmento retilíneo o sentido em que deva ser percorrido, obteremos um segmento orientado ou *vector.*

Para designar um segmento orientado empregam-se as letras correspondentes aos extremos na ordem desejada.

Assim, dizemos segmento OM ou segmento MO, conforme o sentido em que deva ser considerado.

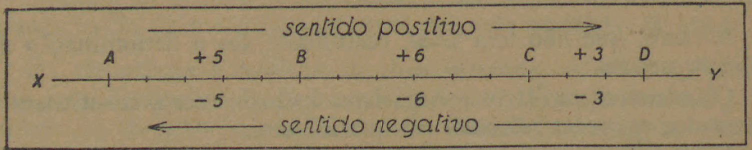


No segmento OM considera-se o percurso no sentido dado pela flecha *f*, isto é, o ponto descreve o segmento partindo de O até chegar a M, enquanto que o segmento MO é descrito em sentido oposto, dado por *f'*

Assim, um segmento orientado encerra duas idéias distintas: certa *extensão*, suscetível de ser representada por número aritmético, e um *sentido* que deve ser representado por um sinal.

99. **Medida dos segmentos orientados.** — Para medir um segmento orientado, deve-se verificar o número de vêzes que a unidade nêle se contém e levar em conta o seu sentido.

Consideremos alguns exemplos, acompanhados da representação gráfica corespondente.



Temos, de acôrdo com a convenção usual,

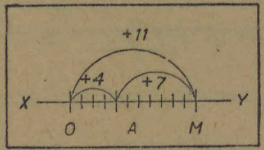
$$AB = +5, \quad BA = -5,$$
$$BC = +6, \quad CB = -6,$$
$$CD = +3, \quad DC = -3.$$

Assim, a medida de um segmento orientado é expressa por número relativo, cujo valor absoluto representa a extensão do segmento e cujo sinal indica o sentido em que é tomado.

100. **Definições.** — Dois segmentos são *iguais* quando têm a mesma extensão e o mesmo sentido.

Dois segmentos são *simétricos* quando têm a mesma extensão e sentidos contrários.

101. **Adição de números relativos. — 1.° caso.** — Suponhamos que um móvel se encontra no ponto O, tomado como referência, na reta XY.



Imaginemos, depois, que o móvel percorre sucessivamente os segmentos

$$OA = +4 \quad \text{e} \quad AM = +7.$$

A distância percorrida pelo móvel será dada por

$$OA + AM = OM.$$

Mas, de acôrdo com a figura, temos

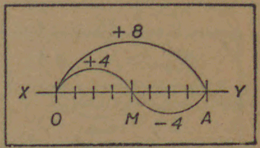
$$OM = +11.$$

Comparando as igualdades supra, podemos escrever

$$+4 + 7 = +11.$$

2.° caso. — Imaginemos, agora, que o móvel, partindo do ponto O, percorre o segmento

$$OA = +8$$



e depois, saindo de A. percorre o segmento.

$$AM = -4.$$

No final do percurso, o móvel se encontrará em M, como se tivesse percorrido apenas o segmento OM.

De acôrdo com a figura, temos

$$OM = +4.$$

Mas, como o móvel realmente percorreu os dois segmentos (embora em sentidos contrários), o percurso total corresponde à *soma* de ambos, isto é,

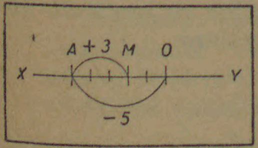
$$OM = OA + AM.$$

Representando os segmentos considerados pelos números relativos correspondentes, vem

$$(+8) + (-4) = +4.$$

3.° caso. — Imaginemos, agora, que o móvel percorre o segmento

$$OA = -5$$



e depois o segmento

$$AM = +3.$$

No final do percurso. o móvel se encontrará no ponto M, tudo se passando como se tivesse percorrido apenas o segmento OM.

Pela figura, temos

$$OM = -2.$$

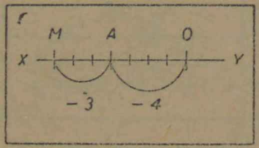
Em verdade, porém, a distância total percorrida pelo móvel foi

$$OM = OA + AM.$$

Substituindo os segmentos considerados pelos números relativos correspondentes, obtemos

$$(-5) + (+3) = -2.$$

4.º caso. — O móvel percorre, agora, o segmento



$$OA = -4$$

e depois

$$AM = -3.$$

No final do percurso, o móvel atingirá o ponto M e a distância total percorrida será

$$OM = OA + AM.$$

De acôrdo com a figura, temos

$$OM = -7.$$

Substituindo os segmentos pelos números relativos correspondentes, encontramos

$$(-4) + (-3) = -7.$$

Observando os resultados obtidos nos exemplos considerados, pode-se estabelecer a regra enunciada a seguir.

102. **Regra.** — *Para somar dois números relativos do mesmo sinal, somam-se os valores absolutos e dá-se ao resultado obtido o sinal comum.*

Para somar dois números relativos de sinais contrários, acha-se a diferença entre os valores absolutos e dá-se ao resultado obtido o sinal do número de maior valor absoluto.

Exemplos:

$$(+5) + (+2) = +5 + 2 = +7.$$
$$(-5) + (-2) = -5 - 2 = -7.$$
$$(+5) + (-2) = +5 - 2 = +3.$$
$$(-5) + (+2) = -5 + 2 = -3.$$

103. **Soma de números simétricos.** — A soma de dois números simétricos é igual a zero.

Dados, por exemplo, os números simétricos

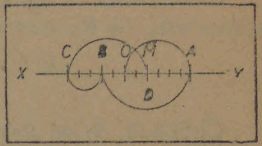
$$+5 \quad \text{e} \quad -5,$$

temos

$$(+5) + (-5) = +5 - 5 = 0.$$

104. **Soma de vários números relativos.** — Consideremos os segmentos

$$OA = +6,$$
$$AB = -8,$$
$$BC = -3,$$
$$CD = +7.$$



Admitindo que um móvel percorra todos êsses segmentos, temos, de acôrdo com a figura,

$$OA + AB + BC + CD = OM.$$

Representando os segmentos considerados pelos números relativos correspondentes, vem

$$(+6) + (-8) + (-3) + (+7) = +2.$$

105. **Propriedades.** — A adição de números relativos, como a de números naturais, apresenta as propriedades *comutativa* e *associativa.*

Dada, por exemplo, a soma de números relativos

$$(+6) + (-8) + (-3) + (+7) = +2,$$

podemos escrever, de acôrdo com a propriedade comutativa,

$$(+6) + (+7) + (-8) + (-3) = +2.$$

Aplicando essas propriedades, podemos efetuar a adição de vários números relativos do modo seguinte: somam-se, separadamente, os têrmos positivos e os têrmos negativos; acha-se depois a soma dos resultados obtidos.

106. **Subtração de números relativos. — 1.º caso.** — Seja efetuar a subtração seguinte:

$$(+6) - (+3).$$

De acôrdo com a definição de subtração, devemos procurar o número que, somado a $(+3)$, dê um resultado igual a $(+6)$.

Se somarmos a $(+6)$ os números simétricos

$$(+3) \quad \text{e} \quad (-3),$$

evidentemente não lhe alteraremos o valor (n.º 103). Podemos, assim, escrever

$$(+6)+(+3)+(-3)=+6.$$

Observando a igualdade acima, concluímos que, para obter o minuendo $(+6)$, devemos somar ao subtraendo $(+3)$

$$+6-3.$$

Chega-se, dêsse modo, a que

$$+6-3$$

é a diferença dos números propostos. — Portanto:

$$(+6)-(+3)=+6-3=+3.$$

2.º **caso.** — Seja efetuar a subtração seguinte:

$$(+8)-(-5).$$

Somando a $(+8)$ os números simétricos $(+5)$ e (-5), encontramos

$$(+8)+(-5)+(+5)=+8.$$

De acôrdo com a igualdade acima, para obter o minuendo $(+8)$, devemos somar ao subtraendo (-5)

$$+8+5,$$

que é, portanto, a diferença dos números propostos. — Assim:

$$(+8)-(-5)=+8+5=+13.$$

3.º **caso.** — Consideremos a diferença indicada

$$(-4)-(+2).$$

Somando a (-4) os números simétricos $(+2)$ e (-2), vem

$$(-4)+(+2)+(-2)=-4.$$

Pela igualdade acima vemos que é preciso somar ao subtraendo $(+2)$

$$-4-2$$

para obtermos o minuendo (-4).

Concluímos, dêsse modo, que

$$-4-2$$

é a diferença dos números propostos. — Portanto:

$$(-4)-(+2)=-4-2=-6.$$

4.º **caso.** — Seja efetuar a diferença seguinte:

$$(-5)-(-3).$$

Somando a (-5) os números simétricos (-3) e $(+3)$, teremos

$$(-5)+(-3)+(+3)=-5.$$

Observando essa igualdade, constatamos que, para obter o minuendo (-5), devemos somar ao subtraendo (-3)

$$-5+3$$

Temos assim, que

$$-5+3$$

é a diferença dos números propostos. — Logo:

$$(-5)-(-3)=-5+3=-2.$$

Observando os resultados obtidos nos casos considerados, podemos estabelecer a regra enunciada a seguir.

107. **Regra.** — *Para subtrair um número relativo de outro, basta somar ao primeiro o segundo com o sinal trocado.*

Exemplos:

$$(+9)-(+4)=+9-4=+5.$$
$$(+9)-(-4)=+9+4=+13.$$
$$(-9)-(+4)=-9-4=-13.$$
$$(-9)-(-4)=-9+4=-5.$$

108. **Soma algébrica.** — Consideremos as seguintes adições e subtrações a efetuar sôbre números relativos:

$$(+5)-(+3)+(-6)-(-4)+(-2).$$

De acôrdo com a indicação dos sinais, deveremos de $(+5)$ subtrair $(+3)$, ao resultado somar (-6), do novo resultado subtrair (-4) e finalmente ao novo resultado somar (-2).

Efetuando por partes essas operações, de acôrdo com as regras relativas à adição e subtração de números relativos, teremos

$$(+5)-(+3)=+5-3,$$
$$(+5-3)+(-6)=+5-3-6,$$
$$(+5-3-6)-(-4)=+5-3-6+4,$$
$$(+5-3-6+4)+(-2)=+5-3-6+4-2.$$

Chegamos, portanto, ao seguinte resultado:

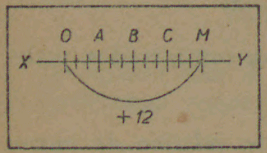
$$+5-3-6+4-2.$$

A essa expressão dá-se o nome de *soma algébrica,* por isso que ela pode ser substituída apenas por adições de números relativos, positivos ou negativos.

Com efeito, de acôrdo com a regra da adição, podemos escrever

$$+5-3-6+4-2=(+5)+(-3)+(-6)+(+4)+(-2).$$

109. **Multiplicação de números relativos. — 1.° caso.** — Imaginemos que um móvel, partindo do ponto O, percorre XY no sentido de X para Y, animado da velocidade de 3 metros por segundo, durante 4 segundos.



O espaço percorrido por um móvel em movimento uniforme é dado pelo produto da velocidade pelo tempo,

$$e=vt.$$

De acôrdo com as convenções usuais, temos, no caso presente,

$$v=+3,$$
$$t=+4.$$

Assim, se designarmos por OM o percurso do móvel, podemos escrever

$$OM=(+3)\times(+4).$$

Por outro lado, a figura indica que, se o móvel percorre 3 metros para a direita em cada segundo, no fim do primeiro segundo estará no ponto A, em 2 segundos no ponto B, em 3 segundos no ponto C e em 4 segundos no ponto M.

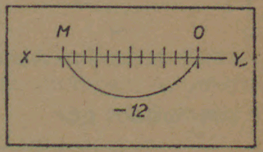
Verifica-se, assim, que o segmento descrito pelo móvel é positivo e mede 12 metros. — Temos, por isso mesmo,

$$OM=+12.$$

Portanto:

$$(+3)\times(+4)=+12.$$

2.° caso. — Admitamos, agora, que o móvel, partindo da origem, percorre XY da direita para a esquerda, durante 4 segundos, com a velocidade de 3 metros por segundo.



Como o sentido do movimento é de Y para X, a velocidade deve ser tomada com o sinal negativo. — Temos, então,

$$v=-3,$$
$$t=+4.$$

Designando por OM o percurso do móvel, vem

$$OM=(-3)\times(+4).$$

De acôrdo com a figura, o móvel parte da origem O e percorre 3 metros em cada segundo para a esquerda de O. Decorridos os quatro segundos, terá atingido o ponto M, realizando, assim, o percurso OM.

O segmento OM mede 12 metros, contados em sentido inverso. — Assim:

$$OM=-12.$$

Temos, portanto:

$$(-3)\times(+4)=-12.$$

3.° caso. — Consideremos, agora, negativo o tempo do percurso.

Como os intervalos de tempo negativos devem ser considerados anteriores a certa referência, enunciaremos êste caso do modo seguinte:

O móvel, que se encontra agora na origem O, tendo percorrido 3 metros por segundo da esquerda para a direita, a que distância dêsse ponto estaria há 4 segundos?

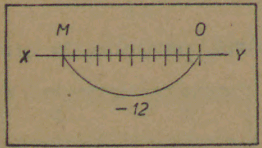
Temos

$$v=+3,$$
$$t=-4.$$

Assim, designando por OM o percurso do móvel, podemos escrever

$$OM = (+3) \times (-4).$$

Por outro lado, a figura indica que, se o móvel marcha da esquerda para a direita, há um segundo deveria estar 3 metros à esquerda de O, há 2 segundos a 6 metros, há 3 segundos a 9 metros e há 4 segundos a 12 metros.



Temos, então,

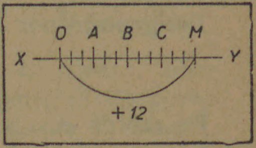
$$OM = -12.$$

e concluímos que

$$(+3) \times (-4) = -12.$$

4.º caso. — Admitindo que a velocidade e o tempo são negativos, enunciemos o caso do seguinte modo:

O móvel, que se encontra presentemente em O, tendo percorrido 3 metros por segundo da direita para a esquerda, a que distância dêsse ponto estaria há 4 segundos?



De acôrdo com as convenções, usuais, temos

$$v = -3,$$
$$t = -4.$$

Se designarmos por OM o percurso do móvel, podemos escrever

$$OM = (-3) \times (-4).$$

Mas, a figura indica que, se o móvel marcha da direita para a esquerda, há um segundo deveria estar 3 metros à direita da origem. Há 4 segundos, o móvel se encontraria em M.

Como

$$OM = +12,$$

concluímos que

$$(-3) \times (-4) = +12.$$

Os resultados obtidos nos casos considerados conduzem-nos à regra enunciada a seguir.

110. **Regra.** — *Para multiplicar dois números relativos, multiplicam-se os valores absolutos, dando-se ao produto obtido o*

sinal + se os fatôres tiverem o mesmo sinal, e o sinal — se os fatôres tiverem sinais contrários.

Exemplos

$$(+7) \times (+5) = +35,$$
$$(+7) \times (-5) = -35,$$
$$(-7) \times (+5) = -35,$$
$$(-7) \times (-5) = +35.$$

111. **Regra dos sinais.** — A regra mediante a qual se obtém o sinal do produto de dois números relativos pode ser resumida no seguinte quadro:

Sinais dos fatôres		*Sinal do produto*
+	+	+
+	−	−
−	+	−
−	−	+

112. **Produto de diversos números relativos.** — Seja efetuar o produto seguinte:

$$(+3) \times (-5) \times (+4) \times (-2).$$

Para obter o produto deve-se multiplicar o primeiro fator pelo segundo, depois multiplicar o produto obtido pelo terceiro e assim por diante até o último fator. — Temos, assim,

$$(+3) \times (-5) = -15,$$
$$(-15) \times (+4) = -60,$$
$$(-60) \times (-2) = +120.$$

Portanto:

$$(+3) \times (-5) \times (+4) \times (-2) = +120.$$

Examinando as operações parcialmente efetuadas, verifica-se que, cada vez que se apresenta um fator negativo, o produto muda de sinal. Conseqüentemente, o sinal do produto final depende apenas do número de fatôres negativos.

Assim, quando o número de fatôres negativos é nulo ou *par*, o produto é *positivo;* quando o número de fatôres negativos é *impar*, o produto é *negativo.* — Exemplos:

1.º $(+2) \times (+3) \times (+5) = +30.$

2.º $(+4) \times (-5) \times (+2) = -40.$

3.º $(-5) \times (-6) \times (+4) = +120.$

113. **Propriedades.** — *Um produto de números relativos não se altera quando se modifica a ordem dos fatôres.* — Exemplo:

$$(+3) \times (-5) \times (+4) \times (-2) = +120,$$
$$(+3) \times (+4) \times (-5) \times (-2) = +120,$$
$$(-2) \times (-5) \times (+4) \times (+3) = +120.$$

Assim, a multiplicação de números relativos é operação comutativa.

Além dessa propriedade, temos a considerar a seguinte:

Em um produto de números relativos, dois ou mais fatôres podem ser substituídos pelo seu produto efetuado. — Exemplo:

$$(+6) \times (+7) \times (+8) \times (-2) = -672,$$
$$(+42) \times (+8) \times (-2) = -672,$$
$$(+42) \times (-16) = -672.$$

Assim, a multiplicação de números relativos é operação associativa.

114. **Produto de uma soma algébrica por um número.** — *Para multiplicar uma soma algébrica por um número relativo multiplica-se cada têrmo da soma por êsse número e somam-se os produtos obtidos.* — Exemplo:

$$(+3-2+5-4) \times (+6) = +18-12+30-24 = +12.$$

115. **Produto de uma soma algébrica por outra.** — *Para multiplicar uma soma algébrica por outra, multiplica-se cada têrmo da primeira por todos os da segunda e somam-se os produtos parciais obtidos.* — Exemplo:

$$(+2-3+4) \times (-5+6) = -10+12+15-$$
$$-18-20+24 = +3.$$

116. **Potenciação de números relativos.** — Recordemos que *potência* de um número é o produto de fatôres iguais a êsse número.

O número de fatôres tomados é indicado pelo *expoente*. — Exemplo:

$$(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2).$$

Para elevar um número relativo a qualquer potência basta aplicar a regra da multiplicação de números relativos. — Exemplos:

$$(+5)^2 = (+5) \times (+5) = +25.$$
$$(-3)^2 = (-3) \times (-3) = +\ 9.$$
$$(+4)^3 = (+4) \times (+4) \times (+4) = +\ 64.$$
$$(-5)^3 = (-5) \times (-5) \times (-5) = -125.$$

Observando os sinais dos resultados obtidos concluímos que:

1.º) *as potências de expoente par de um número relativo são positivas;*

2.º) *as potências de expoente ímpar de um número relativo têm o sinal dêsse número.*

117. **Divisão de números relativos.** — **1.º caso.** — Seja efetuar a divisão seguinte:

$$(+15) : (+3).$$

De acôrdo com a definição de divisão, o quociente deve ser um número tal que, multiplicado pelo divisor, dê um resultado igual ao dividendo.

Como

$$(+3) \times (+5) = +15,$$

segue-se que

$$(+15) : (+3) = +5.$$

2.º caso. — Seja efetuar a divisão seguinte:

$$(+15) : (-3).$$

Temos

$$(-3) \times (-5) = +15.$$

Conseqüentemente:

$$(+15) : (-3) = -5.$$

3.º caso. — Consideremos a divisão seguinte:

$$(-15) : (+3).$$

Temos

$$(+3) \times (-5) = -15.$$

Portanto:

$$(-15):(+3)=-5.$$

4.º caso. — Seja efetuar a divisão

$$(-15):(-3).$$

Temos

$$(-3)\times(+5)=-15.$$

Logo:

$$(-15):(-3)=+5.$$

A observação dos resultados obtidos nos casos considerados conduz-nos à regra enunciada a seguir.

118. **Regra.** — *Para dividir um número relativo por outro, divide-se o valor absoluto do dividendo pelo do divisor, dando-se ao quociente obtido o sinal + se os números dados tiverem o mesmo sinal, e o sinal — se tiverem sinais contrários.* — Exemplos:

$$(+36):(+9)=+4.$$
$$(+36):(-9)=-4.$$
$$(-36):(+9)=-4.$$
$$(-36):(-9)=+4.$$

119. **Regra dos sinais.** — A regra mediante a qual se obtém o sinal do quociente de dois números relativos pode ser resumida no seguinte quadro:

Dividendo	*Divisor*	*Quociente*
+	+	+
+	—	—
—	+	—
—	—	+

119 bis. **Exercícios propostos.**

1. $(+5)+(+10)$. R. $+15$.
2. $(-6)+(+12)$. R. $+6$.
3. $(+7)+(-15)$. R. -8.
4. $(-8)+(-9)$. R. -17.
5. $(+10)+(-7)$. R. $+3$.
6. $(-12)+(-20)$. R. -32.
7. $(+13)+(-15)$. R. -2.
8. $(-15)+(+18)$. R. $+3$.

Calcular as somas seguintes:

9. $(+10)+(-3)+(-12)$. R. -5.
10. $(+12)+(-8)+(-7)+(+15)$. R. $+12$.
11. $(-15)+(-4)+(+21)+(-9)+(-18)$. R. -25.
12. $(-32)+(-25)+(-40)+(+82)+(+22)$. R. $+7$.

Efetuar as subtrações seguintes:

13. $(+9)-(+5)$. R. $+4$.
14. $(+15)-(-3)$. R. $+18$.
15. $(+12)-(+18)$. R. -6.
16. $(+16)-(-4)$. R. $+20$.
17. $(-17)-(+12)$. R. -29.
18. $(-16)-(-20)$. R. $+4$.

Calcular as expressões seguintes:

19. $(+12)-(+5)+(+7)$. R. $+14$.
20. $(-8)+(+3)-(+5)-(-4)$. R. -6.
21. $(+25)-(-12)+(-34)+(+19)$. R. $+22$.
22. $(+34)+(-45)-(-72)+(+33)-(+28)$. R. $+66$.
23. $15+(8-2)+(4-3)-(8+5)$. R. $+9$.
24. $60-(7-5+9-6)+(13-6-4)$. R. $+58$.

Efetuar os produtos seguintes:

25. $(+4)\times(+8)$. R. $+32$.
26. $(-6)\times(+9)$. R. -54.
27. $(+8)\times(-10)$. R. -80.
28. $(-9)\times(-12)$. R. $+108$.
29. $(+10)\times(-9)$. R. -90.
30. $(-18)\times(+10)$. R. -180.

Calcular os produtos seguintes:

31. $(-8)\times(+2)\times(-4)$. R. $+64$.
32. $(+7)\times(-5)\times(+6)\times(+1)$. R. -210.
33. $(+6)\times(-4)\times(-1)\times(+3)\times(+5)$. R. $+360$.
34. $(-9)\times(-2)\times(+8)+(-1)\times(+10)$. R. $-1\,440$.
35. $(-4)\times(-1)^2\times(+2)\times(-5)$. R. $+40$.
36. $(-2)^2\times(-2)^3\times(+4)\times(-2)$. R. $+256$.

Efetuar as divisões seguintes:

37. $(+15) : (+3)$. R. $+5$.
38. $(+27) : (-3)$. R. -9.
39. $(-36) : (+9)$. R. -4.
40. $(-42) : (-7)$. R. $+6$.
41. $(-96) : (+12)$. R. -8.
42. $(+84) : (-12)$. R. -7.

Calcular as expressões seguintes:

43. $(+5) + (-3) \times (+4)$. R. -7.
44. $(+4) \times (-5) - (-8) \times (+2)$. R. -4.
45. $(5 + 4 - 7 - 3 + 6 - 2) \times (-9)$. R. -27.
46. $(3 - 4 + 5) \times (-6 + 8)$. R. $+8$.
47. $[(+32) + (-28) + (-12)] : (+4)$. R. -2.
48. $[(-36) + (-21) - (-17)] : (-8)$. R. $+5$.
49. $(-7)^2 + (+3) \times (-2) - [(+4) \times (-5)]$. R. $+63$.
50. $(-2)^3 - (-3)^2 \times (-5) - [(-7) \times (+3)]$. R. $+58$.

CAPÍTULO VIII

MÚLTIPLOS E DIVISORES; DIVISIBILIDADE

120. **Múltiplo de um número.** — Chama-se *múltiplo* de um número o produto dêsse número por outro número inteiro qualquer.

Exemplo:

$$5 \times 0 = 0, \quad 5 \times 1 = 5, \quad 5 \times 2 = 10, ...$$

são múltiplos de 5.

Quando a divisão de certo número por outro é exata, diz-se que o segundo número é *divisor* do primeiro ou que o primeiro é *divisível* pelo segundo.

Assim, dado o quociente.

$$21 : 3 = 7,$$

segue-se que 3 é divisor de 21 ou que 21 é divisível por 3.

O divisor de um número denomina-se também submúltiplo, fator ou parte alíquota dêsse número.

121. **Observação.** — Todo número é divisível pela unidade e é também múltiplo e divisor de si mesmo.

Nestas condições, com exceção de 1, qualquer número inteiro tem, pelo menos, dois divisores.

Para se reconhecer se um número é divisível por outro basta verificar se a divisão do primeiro pelo segundo é exata.

Entretanto, como veremos adiante, em alguns casos especiais pode-se proceder à mesma verificação sem efetuar a divisão e obter o resto, se houver, mediante o emprêgo de certas regras, denominadas *caracteres de divisibilidade*.

122. **Princípios gerais.** — 1.º *Se um número dividir exatamente dois ou mais outros dividirá do mesmo modo a soma dêles.*

Consideremos os números

$$12, \quad 15 \quad e \quad 18,$$

todos divisíveis por 3. — Temos

$$12 = 4 \times 3$$
$$15 = 5 \times 3$$
$$18 = 6 \times 3.$$

Somando essas igualdades, vem

$$45 = 4 \times 3 + 5 \times 3 + 6 \times 3,$$

expressão que pode ser escrita do modo seguinte:

$$45 = (4 + 5 + 6) \times 3,$$

isto é,

$$45 = 15 \times 3.$$

Esta igualdade permite-nos concluir que a soma dos números dados é também divisível por 3.

2.º *Se um número dividir exatamente outro dividirá do mesmo modo qualquer múltiplo dêsse outro.*

Exemplo: sendo 5 divisor de 15, também o é de

$$15 \times 3 = 45.$$

3.º *Se um número dividir exatamente dois outros dividirá do mesmo modo a diferença dêles.*

Exemplo: sendo 25 e 15 divisíveis por 5, a diferença

$$25 - 15 = 10$$

também é divisível por 5.

4.º *Em uma soma de duas parcelas, se um número dividir exatamente uma delas e não dividir a outra, não dividirá a soma; os restos das divisões da parcela não divisível e da soma, por êsse número, são iguais.*

Exemplo: na soma

$$18 + 35 = 53,$$

o número 3 é divisor de 18, mas não de 35. Assim, a soma 53 não é divisível por 3 e o resto da divisão de 35 por 3 e de 53 por 3 é o mesmo, 2.

123. **Divisibilidade por 10 e suas potências.** — O produto de qualquer número por 10 termina em zero; em conseqüência, todo número terminado em zero é múltiplo de 10. — Logo:

Um número é divisível por 10 quando termina em zero.

Exemplo:

$$60 \quad e \quad 1\,580.$$

Por outro lado, o produto de qualquer número por 100 tem dois zeros como últimos algarismos à direita. — Logo:

Um número é divisível por 100 quando os seus últimos algarismos à direita são dois zeros.

Exemplo:

$$1\,500 \quad e \quad 3\,200.$$

Do mesmo modo, chega-se à conclusão seguinte:

Um número é divisível por 1 000 quando os seus últimos algarismos à direita são três zeros.

Exemplo:

$$12\,000 \quad e \quad 45\,000.$$

124. **Divisibilidade por 2.** — *Um número é divisível por 2 quando o número representado pelo seu último algarismo à direita é divisível por 2.*

Com efeito, um número qualquer pode ser decomposto em soma de duas parcelas, sendo a primeira terminada em zero e a segunda formada pelo algarismo das unidades. — Exemplo:

$$128 = 120 + 8.$$

A primeira parcela é divisível por 2, uma vez que

$$10 = 2 \times 5.$$

Assim, se a segunda parcela fôr divisível por 2 o número considerado também o será.

125. **Números pares.** — Além de zero, os números de um algarismo divisíveis por 2 são: 2, 4, 6 e 8. Por isso mesmo, sòmente os números terminados em 0, 2, 4, 6 e 8 são divisíveis por 2. Êsses números denominam-se pares.

Um número é *par* quando seu último algarismo à direita é

$$0, \quad 2, \quad 4, \quad 6 \quad ou \quad 8.$$

Por outro lado, um número diz-se *ímpar* quando seu último algarismo à direita é

1, 3, 5, 7 ou 9.

126. **Divisibilidade por 5.** — *Um número é divisível por 5 quando o número representado pelo seu último algarismo à direita é divisível por 5.*

Como vimos ao tratar da divisibilidade por 2, um número qualquer pode ser decomposto em duas parcelas, sendo a primeira terminada em zero e a segunda formada pelo algarismo das unidades. — Exemplo:

$$635 = 630 + 5.$$

A primeira é divisível por 5, por isso que $10 = 5 \times 2$. Assim, se a segunda parcela fôr divisível por 5, o número considerado também o será.

Ademais, acentuemos que sòmente os números terminados em 0 e 5 são divisíveis por 5.

127. **Divisibilidade por 4.** — *Um número é divisível por 4 quando os seus dois últimos algarismos à direita formam um número divisível por 4.*

Com efeito, qualquer número maior que 100 pode ser decomposto em soma de duas parcelas, tendo a primeira dois zeros como últimos algarismos à direita e sendo a segunda formada pelos algarismos das dezenas e das unidades. — Exemplo:

$$836 = 800 + 36.$$

A primeira parcela é divisível por 4, por isso que

$$100 = 4 \times 25.$$

Assim, se a segunda parcela fôr divisível por 4, o número considerado também o será.

128. **Divisibilidade por 25.** — De acôrdo com as considerações expendidas no caso anterior somos levados também à conclusão seguinte:

Um número é divisível por 25 quando os seus dois últimos algarismos à direita formam um número divisível por 25. — Exemplo:

350.

129. **Divisibilidade por 8.** — Mediante raciocínio análogo ao empregado nos parágrafos precedentes, podemos estabelecer o seguinte princípio:

Um número é divisível por 8 quando os seus três últimos algarismos à direita formam um número divisível por 8. — Exemplo:

6 120.

130. **Divisibilidade por 9.** — *Um número é divisível por 9 quando a soma dos valores absolutos de seus algarismos é divisível por 9.*

Para estabelecer êste caráter partimos da seguinte consideração: uma potência qualquer de 10 é igual a um múltiplo de 9 mais 1.

Com efeito, temos

$$10 = 9 + 1 = m.9 + 1$$
$$100 = 99 + 1 = m.9 + 1$$
$$1\,000 = 999 + 1 = m.9 + 1.$$

Por outro lado, vejamos que qualquer número formado de um algarismo significativo seguido de zeros é igual a um múltiplo de 9 mais o valor absoluto dêsse algarismo.

Tomando, como exemplo, o número 3 000, temos

$$3\,000 = 3 \times 1\,000 = 3 \times (m.9 + 1).$$

Notando que

$$3 \times m.9 = m.9,$$

podemos escrever

$$3 \times (m.9 + 1) = m.9 + 3.$$

Considerando, agora, um número qualquer, 743 por exemplo, temos

$$743 = 700 + 40 + 3.$$

Como vimos,

$$700 = m.9 + 7$$
$$40 = m.9 + 4$$
$$3 = \quad 3.$$

Somando ordenadamente essas igualdades, vem

$$743 = m.9 + m.9 + (7 + 4 + 3).$$

Notando que

$$m.\,9 + m.\,9 = m.\,9,$$

segue-se que

$$743 = m.\,9 + 14.$$

Assim, um número qualquer é igual a um múltiplo de 9 mais a soma dos valores absolutos de seus algarismos.

A primeira parcela dessa soma é divisível por 9; se a segunda parcela também o fôr, o número considerado será divisível por 9.

Exemplo: o número

$$1935$$

é divisível por 9, por isso que

$$1 + 9 + 3 + 5 = 18 = m.\,9.$$

131. **Divisibilidade por 3.** — Tendo em vista que todo múltiplo de 9 é múltiplo de 3, podemos enunciar o seguinte caráter de divisibilidade:

Um número é divisível por 3 quando a soma dos valores absolutos de seus algarismos é divisível por 3.

Exemplo: o número 816 é divisível por 3, por isso que

$$8 + 1 + 6 = 15 = m.\,3;$$

o número 347 não é divisível por 3, uma vez que a soma

$$3 + 4 + 7 = 14$$

não é divisível por 3.

132. **Divisibilidade por 11.** — *Um número é divisível por 11 quando a diferença entre as somas dos valores absolutos dos algarismos de ordem ímpar e de ordem par, a partir da direita, é múltiplo de 11.*

Para estabelecer êste princípio partimos da consideração seguinte: qualquer potência de 10 é igual a um múltiplo de 11 mais ou menos 1; mais quando a potência é par, menos quando é ímpar, a saber,

$$\begin{aligned} 10 &= \quad 11 - 1 \\ 100 &= m.\,11 + 1 \\ 1\,000 &= m.\,11 - 1 \\ 10\,000 &= m.\,11 + 1. \end{aligned}$$

Por outro lado, qualquer número formado de algarismo significativo seguido de zeros é igual a um múltiplo de 11 mais ou menos o valor absoluto dêsse algarismo; mais quando o número de zeros é par, menos quando é ímpar.

Com efeito, temos

$$\begin{aligned} 500 &= 5 \times 100 = 5 \times (m.\,11 + 1) = m.\,11 + 5 \\ 5\,000 &= 5 \times 1\,000 = 5 \times (m.\,11 - 1) = m.\,11 - 5. \end{aligned}$$

Ademais, vejamos que um número qualquer é igual a um múltiplo de 11 mais a diferença entre as somas dos valores absolutos dos algarismos de ordem ímpar e de ordem par, a partir da direita.

Seja, por exemplo, o número 3 827. — Temos

$$3\,827 = 3\,000 + 800 + 20 + 7.$$

Como vimos,

$$\begin{aligned} 3\,000 &= m.\,11 - 3 \\ 800 &= m.\,11 + 8 \\ 20 &= m.\,11 - 2 \\ 7 &= \qquad\quad 7. \end{aligned}$$

Somando estas igualdades, encontramos

$$\begin{aligned} 3\,827 &= m.\,11 + (7 + 8) - (2 + 3) = m.\,11 + 15 - 5 = \\ &= m.\,11 + 10. \end{aligned}$$

A primeira parcela é divisível por 11; se a segunda parcela também o fôr, o número considerado será divisível por 11.

Quando a soma dos valores absolutos dos algarismos de ordem ímpar é menor que a soma dos valores absolutos dos algarismos de ordem par, a fim de tornar possível a subtração, pode-se somar à primeira qualquer múltiplo de 11.

133. **Propriedades elementares dos restos.** — 1.ª *Na divisão de uma soma por um número o resto que se obtém é o mesmo da divisão por êsse número da soma dos restos das parcelas.*

Exemplo: na divisão

$$(12 + 8 + 7) : 5,$$

temos $r = 2$.

Por outro lado, somando os restos das divisões

$$12 : 5, \quad 8 : 5 \quad \text{e} \quad 7 : 5,$$

encontramos

$$2 + 3 + 2 = 7.$$

Na divisão

$$7:5$$

temos $r = 2$.

2.ª *Na divisão de um produto por um número o resto que se obtém é o mesmo da divisão por êsse número do produto dos restos dos fatôres.*

134. **Provas por um divisor.** — Aplicando as propriedades elementares dos restos e tendo em vista os caractéres de divisibilidade, podemos estabelecer regras para a verificação dos resultados obtidos nas operações fundamentais.

1.ª — *Prova por 9 da adição.*

Seja verificar a soma

$$7\,528 + 6\,319 + 3\,975 = 17\,822.$$

Dividindo por 9 cada uma das parcelas e somando os resultados obtidos, vem

$$\begin{array}{ll} 7\,528 : 9 \ldots & r = 4 \\ 6\,319 : 9 \ldots & r = 1 \\ 3\,975 : 9 \ldots & r = 6 \\ \hline 17\,822 & \quad 11. \end{array}$$

Dividindo por 9 a soma dos números dados e a dos restos das parcelas, encontramos

$$17\,822 : 9, \quad r = 2; \quad 11 : 9, \quad r = 2.$$

2.ª — *Prova por 9 da subtração.*

Na prova por 9 da subtração procede-se do mesmo modo que na adição, considerando-se o subtraendo e o resto como parcelas e o minuendo como soma dessas parcelas.

Realmente, em qualquer subtração, como

$$25 - 12 = 13$$

por exemplo, temos

$$12 + 13 = 25.$$

3.ª — *Prova por 9 da multiplicação.*

Seja verificar o produto

$$3\,824 \times 83 = 317\,392.$$

Dividindo por 9 cada um dos fatôres e multiplicando os restos obtidos, vem

$$\begin{array}{rl} 3\,824 : 9 \ldots\ldots\ldots & r = 8 \\ 83 : 9 \ldots\ldots\ldots & r = 2 \\ \hline 11\,472 & \\ 305\,92 & \\ \hline 317\,392 \ldots & 8 \times 2 \ldots = 16. \end{array}$$

Dividindo por 9 o produto dos números dados e o dos restos dos fatôres, vem

$$317\,392 : 9, \quad r = 7; \quad 16 : 9, \quad r = 7.$$

4.ª — *Prova por 9 da divisão.*

Tendo-se em vista que, em tôda divisão, o dividendo é igual ao produto do divisor pelo quociente mais o resto, segue-se que, para obter a prova por nove da divisão, basta subtrair o resto do dividendo e proceder de modo análogo à multiplicação.

135. **Exercícios resolvidos.**

1.º *Verificar se 32 518 é divisível por 3; se não o fôr, achar o resto da divisão.*

Somando os valores absolutos dos algarismos, obtemos

$$3 + 2 + 5 + 1 + 8 = 19.$$

Como 19 não é divisível por 3, o número dado não é divisível por 3. O resto da divisão de 32 518 por 3 é o mesmo da divisão

$$19 : 3,$$

isto é, 1.

2.º *Verificar se 498 124 é divisível por 11; se não o fôr, achar o resto da divisão.*

Somando separadamente os algarismos de ordem ímpar e os de ordem par, encontramos

$$4 + 1 + 9 = 14 \quad \text{e} \quad 2 + 8 + 4 = 14.$$

Subtraindo uma soma da outra, vem

$$14 - 14 = 0.$$

Tendo chegado a um resto nulo, concluímos que o número dado é divisível por 11.

3.º *Qual o menor número que se deve somar a 8 349 para se obter um múltiplo de 9?*

Somando os valores absolutos dos algarismos do número dado, encontramos

$$8 + 3 + 4 + 9 = 24.$$

O resto da divisão de 8 349 por 9 será, portanto,

$$24 - 18 = 6.$$

O excesso do divisor sôbre o resto é

$$9 - 6 = 3.$$

Deve-se então somar 3 ao número dado.

136. Exercícios propostos.

1. Verificar quais dos números 3 512, 1 824 e 4 371 são divisíveis por 3. R. 1 824 e 4 371.
2. Verificar quais dos números 23 042, 14 526, 25 310 e 16 228 são divisíveis por 4. R. 16 228.
3. Verificar quais dos números 13 040, 20 608 e 223 412 são divisíveis por 8. R. 13 040 e 20 608.
4. Verificar quais dos números 12 649, 17 001 e 31 533 são divisíveis por 9. R. 17 001.
5. Verificar quais dos números 68 508, 39 566, 46 214 e 13 574 são divisíveis por 11. R. 68 508 e 13 574.
6. Achar os múltiplos de 15 compreendidos entre 250 e 290. R. 255, 270 e 285.
7. Qual o menor múltiplo de 9 formado sòmente com o algarismo 6? R. 666.
8. Achar o resto da divisão de 18 725 por 3, por 4 e por 5. R. 2, 1 e 0.
9. Achar o resto da divisão de 125 601 por 3, por 4 e por 9. R. 0, 1 e 6.
10. Achar o resto da divisão de 56 408 por 3, por 5 e por 8. R. 2, 3 e 0.
11. Achar o resto da divisão de 69 484 por 3, por 4 e por 11. R. 1, 0 e 8.
12. Achar o resto da divisão da expressão
$$(495 + 596 + 521)$$
por 9, sem efetuar as operações indicadas. R. 1.
13. Achar o resto da divisão da expressão
$$(1\,352 + 2\,715 + 3\,287)$$
por 11, sem efetuar as operações indicadas. R. 6.

14. Achar o resto da divisão por 11 do produto
$$3\,242 \times 685 \times 463,$$
sem efetuar as multiplicações indicadas. R. 2.
15. Qual o menor número que se deve somar a 49 875 para se obter um múltiplo de 4? R. 1.
16. Qual o menor número que se deve somar a 47 812 para se obter um múltiplo de 9? R. 5.
17. Qual o menor número que se deve somar a 145 982 para se obter um múltiplo de 11? R. 10.
18. Qual o menor número que se deve subtrair de 45 039 para se obter um múltiplo de 4? R. 3.
19. Qual o menor número que se deve subtrair de 75 628 para obter um múltiplo de 9? R. 1.
20. Achar o menor número que se deve subtrair de 99 070 para se obter um múltiplo de 11. R. 4.
21. Qual o algarismo que se deve colocar à direita de 25 918 para que o número resultante seja divisível por 9? R. 2.
22. Qual o algarismo que se deve colocar entre os algarismos 4 e 2 do número 42 para obter-se um número divisível por 4 e por 9? R. 3.
23. Qual o algarismo que se deve colocar à direita de 79 para se obter um número divisível por 3 e por 11? R. 2.
24. Dado o número 7*a*2, substituir a letra *a* por um algarismo tal que o número resultante seja divisível por 4 e por 9. R. 9.
25. Dado o número *a*40, substituir a letra *a* por um algarismo tal que o número resultante seja divisível por 3 e por 8. R. 8.
26. Dado o número 52*a*, substituir a letra *a* por um algarismo tal que o número resultante seja divisível por 3 e por 11. R. 8.
27. Qual o algarismo que se deve suprimir do número 7 284 356 a fim de que o número resultante seja divisível por 9? R. 8.
28. Escrevendo o mesmo algarismo à direita e à esquerda do número 327 obtém-se um múltiplo de 9. Qual é o algarismo? R. 3.
29. Qual o algarismo que se deve intercalar entre os algarismos 6 e 8 do número 168 para obter-se um múltiplo de 4 e de 11? R. 2.
30. Qual o algarismo que se deve intercalar entre os algarismos 1 e 8 do número 186 para obter-se um múltiplo de 9 e de 11? R. 3.

CAPÍTULO IX

NÚMEROS PRIMOS E NÚMEROS COMPOSTOS

137. **Números primos.** — Dá-se a denominação de número primo a todo número que só é divisível por si mesmo e pela unidade. — Exemplo:

1, 2, 3, 5, 7, 11,...

Os números primos podem ser também chamados *números simples;* os números que não são primos dizem-se *números compostos.*

Os números primos formam um conjunto denominado *conjunto dos números primos.* O conjunto dos números primos é ilimitado.

138. **Números primos entre si.** — Dois ou mais números dizem-se *primos entre si* quando só têm como divisor comum a unidade. — Exemplo:

4 e 9.

Dois ou mais números são *primos entre si dois a dois* quando dois quaisquer dentre êles são primos entre si.

Assim, os números

15, 22 e 49

são primos entre si dois a dois, por isso que

15 e 22; 15 e 49; 22 e 49

são primos entre si.

139. **Crivo de Eratóstenes.** — Damos a seguir o processo mediante o qual se pode formar uma tabela de números primos, desde 1 até um número qualquer.

Seja procurar todos os números primos inferiores a 100.

Escrevemos em sua ordem natural os números desde 1 até 10 que é o limite adotado.

Conservando os números 1 e 2, risquemos de dois em dois os números seguintes a 2; a partir de 3, riscam-se os seguintes de três em três; a partir de 5, riscam-se os números seguintes de cinco em cinco, assim prosseguindo-se.

1	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Os números assinalados são compostos, como múltiplos sucessivos, de 2, de 3, de 5, etc. e os restantes

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ... 97,

são primos, pois o fato de não haverem sido riscados significa que qualquer dêles não é divisível pelos números primos que o antecederam, afora a unidade, na sucessão que se vai formando pelo processo de seleção indicado.

O processo é devido a Eratóstenes, filósofo grego, e tem a denominação de *crivo de Eratóstenes.*

140. **Observação.** — Na formação da tabela acima observamos que, ao riscar os múltiplos de qualquer dos números seguintes a dois, encontramos números já riscados e bem assim que o primeiro dêsses múltiplos que ainda não o foi é o quadrado do número considerado.

Assim é que dos múltiplos de 5 o primeiro não riscado é 25, pois os precedentes,

10, 15 e 20,

já haviam sido riscados como múltiplos de 2 e de 3.

Anàlogamente, concluímos que o primeiro múltiplo de 7 ainda não riscado é

$$7 \times 7 = 49$$

e assim por diante.

Por êsse motivo, pode-se tomar como ponto de partida, ao riscar os múltiplos de cada número, o quadrado dêsse número e prosseguir do mesmo modo até ser considerado um número primo cujo quadrado seja maior que o limite da tábua.

141. **Reconhecimento dos números primos.** — Seja verificar se o número 499 é primo.

Tendo em vista que todo número múltiplo admite, pelo menos, um divisor diferente de 1, devemos ensaiar a divisão de 499 pelos números primos em sua ordem natural.

Desde logo, verifica-se que 499 não é divisível por 2, por 3, por 5, por 7 e por 11. — Ensaiemos, então, os números primos seguintes a 11:

```
499 | 13      499 | 17      499 | 19      499 | 23
109   38      159   29      119   26      039   21
 05            06            05            16
```

Na divisão de 499 por 23, encontramos o quociente 21, menor que o divisor; e, como não obtivemos divisão exata, podemos afirmar que 499 é primo, sem precisar prosseguir nas divisões. Com efeito, se 499 fôsse divisível por um número primo maior que 23, o quociente seria menor que 23, e teria aparecido como divisor, nas tentativas anteriores.

142. **Regra.** — *Para reconhecer se um número é primo, basta dividi-lo sucessivamente pelos números primos, tomados em sua ordem natural crescente, a partir de 2, até que se obtenha um quociente menor que o divisor; se nenhuma dessas divisões fôr exata, o número dado é primo.*

143. **Decomposição em fatôres primos.** — *Todo número múltiplo é igual a um produto de fatôres primos.* — Exemplo:

$$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$$
$$180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5.$$

Assim, decompor um número em fatôres primos significa procurar dois ou mais números primos cujo produto seja igual ao número proposto.

```
2310 | 2
       1155 | 3
               385 | 5
                      77 | 7
                           11
```

Consideremos o número 2 310.

Notando que 2 310 é divisível por 2, teremos

$$2\,310 = 2 \times 1\,155.$$

Sendo 1 155 divisível por 3, vem

$$2\,310 = 2 \times (3 \times 385).$$

Tendo em vista que 385 é divisível por 5, podemos escrever

$$2\,310 = 2 \times 3 \times (5 \times 77).$$

Por outro lado, como 77 é múltiplo de 7, segue-se que

$$2\,310 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11.$$

144. **Regra.** — *Para se decompor um número em fatôres primos divide-se o número pelo seu menor divisor primo diferente de 1; divide-se depois o quociente obtido pelo seu menor divisor primo; assim se prossegue, dividindo sempre o último quociente pelo seu menor divisor primo, até que se encontre um quociente igual a 1. Os números que serviram de divisores são os fatôres procurados.*

34 650	2
17 325	3
5 775	3
1 925	5
385	5
77	7
11	11
1	

Na prática dispõe-se o cálculo da maneira indicada ao lado, escrevendo-se à esquerda do traço vertical os dividendos e os quocientes sucessivos e à direita do mesmo traço os fatôres primos encontrados.

Para obter os divisores sucessivos aplicam-se os caracteres de divisibilidade, efetuando-se, em geral, mentalmente as divisões respectivas.

Temos, assim,

$$34\,650 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 11$$

ou

$$34\,650 = 2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 \times 11.$$

145. **Observação.** — Na decomposição de um número em fatôres primos as divisões poderiam ser iniciadas por qualquer dêles. Entretanto, para maior facilidade, preferimos tomar os divisores segundo a ordem natural dos números primos.

146. **Decomposição abreviada.** — Em muitos casos pode-se abreviar a decomposição de um número em fatôres primos e até efetuá-la mentalmente, utilizando divisores não primos, os quais vão sendo depois decompostos.

Consideremos alguns exemplos:

$$84 = 7 \times 12 = 7 \times 3 \times 4 = 7 \times 3 \times 2^2 = 2^2 \times 3 \times 7,$$

$$96 = 8 \times 12 = 8 \times 3 \times 4 = 2^3 \times 3 \times 2^2 = 2^5 \times 3,$$

$$108 = 9 \times 12 = 9 \times 3 \times 4 = 3^2 \times 3 \times 2^2 = 3^3 \times 2^2 = 2^2 \times 3^3.$$

147. **Condição de divisibilidade de um número por outro.** — *Para que um número seja divisível por outro é necessário e suficiente que contenha todos os fatôres primos dêsse outro, cada um dêles pelo menos com o mesmo expoente.*

Com efeito, seja o número 180, o qual, como se sabe, pode ser decomposto do modo seguinte:

$$180 = 18 \times 10.$$

Se efetuarmos a decomposição dos números 18 e 10 em fatôres primos e tomarmos o produto dêsses fatôres teremos decomposto 180 em fatôres primos.

Assim, o número 180 conterá todos os fatôres de 18 com expoentes, no mínimo, iguais.

Realmente, temos

$$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$$

$$18 = 2 \times 3^2.$$

148. **Formação dos divisores de um número.** — Seja procurar todos os divisores de 180.

Decompondo 180 em fatôres primos, encontramos

$$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5.$$

Entre os divisores de 180 figuram, portanto,

1, 2, 4,
1, 3, 9,
1, 5.

Ademais, notando que qualquer divisor de 180 deve ser formado com alguns dos fatôres 1, 2, 3 e 5 ou todos êles, cada um dos quais com um expoente menor ou igual ao que tem em 180, segue-se que todos os produtos que se podem formar, tomando um número de cada linha e multiplicando êsses números, são divisores de 180. Procuremos, pois, obtê-los.

Multiplicando sucessivamente os números da primeira linha pelos da segunda, vem

1, 2, 4,
3, 6, 12,
9, 18, 36.

Multiplicando êsses produtos pelos números da terceira linha, encontramos

5, 10, 20,
15, 30, 60,
45, 90, 180.

Nos três quadros assim formados estão contidos todos os divisores de 180.

A seguir damos o dispositivo prático usado na operação para maior facilidade das multiplicações sucessivas.

		1
180	2	2
90	2	4
45	3	3,6,12
15	3	9,18,36
5	5	5,10,20,15,30,60,45,90,180.
1		

149. **Número de divisores de um número.** — Para se obter o número de divisores de um número procede-se do modo seguinte; decompõe-se o número dado em seus fatôres primos; depois, soma-se uma unidade a cada expoente dos fatôres encontrados e toma-se o produto dos fatôres assim formados. — Exemplo:

Achar o número de divisores de 120.

Decompondo 120 em fatôres primos, encontramos

$$120 = 2^3 \times 3 \times 5.$$

Somando um a cada expoente dêsses fatôres, temos

$$3 + 1 = 4, \quad 1 + 1 = 2, \quad 1 + 1 = 2.$$

Formando o produto dessas somas, vem

$$4 \times 2 \times 2 = 16.$$

Assim, o número dado tem 16 divisores.

150. Número divisível por dois ou mais números primos entre si dois a dois. — Os números primos entre si apresentam dentre outras a propriedade enunciada a seguir.

Todo número divisível por vários outros primos entre si dois a dois é divisível pelo produto dêles.

Exemplo: sendo 240 divisível por

$$3, \quad 4 \quad e \quad 5,$$

sê-lo-á também por

$$3 \times 4 \times 5 = 60.$$

151. Aplicação à divisibilidade. — A propriedade precedente permite-nos estabelecer caracteres de divisibilidade para certos números formados pelo produto de fatôres primos entre si dois a dois.

Enunciemos alguns dêles.

1.º) *Um número é divisível por 6 quando é por 2 e por 3.* — Exemplo:

$$234$$

2.º) *Um número é divisível por 12 quando é por 3 e por 4.* — Exemplo:

$$348.$$

3.º) *Um número é divisível por 15 quando é por 3 e por 5.* — Exemplo:

$$645.$$

Devemos acentuar que a condição essencial para que êsses caracteres prevaleçam é que os fatôres sejam primos entre si dois a dois.

Assim é que o número 36, por exemplo, é divisível por 4 e por 6 mas não o é por 24.

152. Exercícios.

Verificar se são primos os números seguintes:

1. 437. R. Não é.
2. 521. R. É.
3. 1 087. R. É.
4. 1 313. R. Não é.
5. 1 327. R. É.

6. 3 167. R. É.
7. 3 293. R. Não é.
8. 6 943. R. Não é.
9. 7 823. R. É.
10. 8 383. R. Não é.

Decompor em fatôres primos os números seguintes:

11. 120. R. $3^3 \times 3 \times 5$.
12. 180. R. $2^2 \times 3^2 \times 5$.
13. 252. R. $2^2 \times 3^2 \times 7$.
14. 472. R. $2^3 \times 59$.
15. 630. R. $2 \times 3^2 \times 5 \times 7$.
16. 1 078. R. $2 \times 7^2 \times 11$.
17. 2 695. R. $5 \times 7^2 \times 11$.
18. 7 650. R. $2 \times 3^2 \times 5^2 \times 17$.
19. 7 865. R. $5 \times 11^2 \times 13$.
20. 14 399. R. $7 \times 11^2 \times 17$.

Achar os divisores dos números seguintes:

21. De 150. R. 1, 2, 3, 6, 5, 10, 15, 30, 25, 50, 75, 150.
22. De 315. R. 1, 3, 9, 5, 15, 45, 7, 21, 63, 35, 105 e 315.
23. De 4 719. R. 1, 3, 11, 33, 121, 363, 13, 39, 143, 429, 1 573 e 4 719.

Calcular o número de divisores dos números seguintes:

24. De 140. R. 12.
25. De 324. R. 15.
26. De 360. R. 24.
27. De 1 728. R. 28.
28. De 2 800. R. 30.
29. De 9 000. R. 48.
30. De 81 675. R. 36.

CAPÍTULO X

MÁXIMO DIVISOR COMUM

153. **Divisores comuns.** — Dá-se a denominação de *divisor comum* de dois ou mais números a todo número que os divide exatamente.

Exemplo: os números

$$6, \quad 12 \quad e \quad 18$$

apresentam os seguintes divisores comuns:

$$1, \quad 2, \quad 3 \quad e \quad 6.$$

154. **Máximo divisor comum.** — Ao maior dos divisores comuns de dois ou mais números dá-se a denominação de máximo divisor comum dêsses números.

Máximo divisor comum de dois ou mais números é o maior dos seus divisores comuns.

Indica-se o máximo divisor comum de dois ou mais números com o símbolo *m. d. c.*

Assim, dados os números 6, 12 e 18, temos

$$\text{m. d. c.} \quad (6, \quad 12 \quad e \quad 18) = 6.$$

155. **Pesquisa do m. d. c. de dois números.** — A pesquisa do m. d. c. de dois números funda-se nos seguintes princípios:

1.º *Quando um número é divisível por outro, o menor dêles é o máximo divisor comum de ambos.* — Exemplo:

$$\text{m. d. c.} \quad (36 \quad e \quad 12) = 12.$$

Com efeito, sendo 12 divisor de 36 e de si mesmo, é divisor comum dos números dados; ademais, é o maior dêles, uma vez que um número maior que 12 não pode dividir exatamente 12.

2.º *Se um número não é divisível por outro, o m. d. c. de ambos é o mesmo que o do menor e o resto da divisão do maior pelo menor.* — Exemplo: dados os números

$$180 \quad e \quad 50,$$

em que

$$180 = 50 \times 3 + 30,$$

temos

$$\text{m. d. c.} \quad (180 \quad e \quad 50) = \text{m. d. c.} \quad (50 \quad e \quad 30).$$

156. **Aplicações.** — 1.ª *Procurar o m. d. c. dos números 240 e 60.*

Dividindo 240 por 60, vem

$$\begin{array}{r|l} 240 & 60 \\ \hline 00 & 4 \end{array}$$

Sendo exata a divisão, concluímos que

$$\text{m. d. c.} \quad (240 \quad e \quad 60) = 60.$$

2.ª *Procurar o m. d. c. dos números 180 e 50.*

Dividindo 180 por 50, chega-se a

$$\begin{array}{r|l} 180 & 50 \\ \hline 30 & 3 \end{array}$$

A divisão não sendo exata, devemos dividir 50 por 30. — Assim procedendo, vem

$$\begin{array}{r|l} 50 & 30 \\ \hline 20 & 1 \end{array}$$

Como a divisão acima também não é exata, concluímos que 30 não é o m. d. c. procurado. Entretanto, êsse m. d. c. deverá ser o mesmo que o m. d. c. do divisor (30) e o resto dessa nova divisão (20).

Dividindo 30 por 20, encontraremos

$$\begin{array}{r|l} 30 & 20 \\ \hline 10 & 1 \end{array}$$

Como a divisão ainda não é exata, dividamos 20 por 10:

$$\begin{array}{r|l} 20 & 10 \\ \hline 0 & 2 \end{array}$$

Sendo exata a divisão, concluímos que 10 é o m. d. c. procurado.

157. **Algoritmo de Euclides.** — A fim de facilitar essas operações podemos adotar o dispositivo prático indicado no quadro ao lado, denominado *algoritmo de Euclides*, escrevendo sôbre os divisores considerados os quocientes sucessivos e sob os dividendos considerados os respectivos restos. O processo que aplicamos é denominado *processo das divisões sucessivas.*

	3	1	1	2
180	50	30	20	10
30	20	10	00	

As considerações expendidas sugerem a regra enunciada a seguir.

158. **Regra.** — *Para obter-se o m. d. c. de dois números divide-se o maior pelo menor; se o resto encontrado fôr zero, o menor dos números dados é o m. d. c. de ambos; se não o fôr, divide-se o divisor pelo resto, procedendo-se nessa divisão como na primeira. Continua-se a operação, do mesmo modo, até que se chegue a um resto igual a zero. O último divisor, neste caso, é o m. d. c. procurado.*

Exemplo: achar o m. d. c. dos números 8 795 e 6 820.

Aplicando a regra e dispondo a operação da maneira indicada acima, vem

	1	3	2	4	1	5	6
8 795	6 820	1 975	895	185	155	30	5
1 975	895	185	155	30	5	0	

Temos, assim,

$$\text{m. d. c. } (8\,795 \text{ e } 6\,820) = 5.$$

159. **Simplificações.** — 1.ª Quando o resto encontrado em uma das divisões fôr igual a 1, pode-se dar por terminada a operação. É que, devendo o m. d. c. procurado dividir os restos sucessivos, será também igual a 1, o que significa serem primos entre si os números dados.

2.ª Se em uma das divisões o divisor e o resto forem primos entre si não se deve prosseguir na operação já que os números dados também o serão.

3.ª Quando o resto de uma das divisões fôr maior que a metade do divisor correspondente, pode-se tomar na divisão seguinte um divisor formado pela diferença entre o divisor precedente a êsse resto.

160. **Propriedades.** — 1.ª *Se dois números forem multiplicados por um terceiro, o seu m. d. c. fica multiplicado por êsse terceiro.* — Exemplo:

$$\text{m. d. c. } (9 \text{ e } 6) = 3.$$
$$\text{m. d. c. } (90 \text{ e } 60) = 30.$$

Com efeito, quando se multiplicam dois números por um terceiro, o resto da divisão dêsses números fica também multiplicado por êsse terceiro. — Assim, os restos sucessivos obtidos na pesquisa do m. d. c. dos números considerados ficam todos multiplicados por êsse terceiro, inclusive o penúltimo, que é o m. d. c. de ambos.

2.ª *Quando se dividem dois números por um de seus divisores comuns, o m. d. c. dêsses números fica dividido por êsse divisor.* — Exemplo:

$$\text{m. d. c. } (90 \text{ e } 60) = 30.$$
$$\text{m. d. c. } (9 \text{ e } 6) = 3.$$

3.ª *Se dois números forem divididos pelo seu m. d. c., os quocientes obtidos serão números primos entre si.* — Assim, dado

$$\text{m. d. c. } (90 \text{ e } 60) = 30,$$

dizemos que os quocientes

$$90 : 30 = 3 \quad \text{e} \quad 60 : 30 = 2$$

são números primos entre si.

Essa propriedade é conseqüência da anterior.

4.ª *Se um número dividir exatamente dois outros, dividirá do mesmo modo o m. d. c. de ambos.* — Exemplo:

$$\text{m. d. c. } (36 \text{ e } 24) = 12.$$

Sendo 4 divisor de 36 e 24, o é também de 12.

161. **Cálculo do m. d. c. pela fatoração.** — Segundo os princípios estudados, podemos calcular o m. d. c. de vários números pela decomposição dos mesmos em seus fatôres primos.

Com efeito, consideremos os números

$$36 = 2^2 \times 3^2,$$
$$60 = 2^2 \times 3 \times 5,$$
$$72 = 2^3 \times 3^2.$$

Sendo 2^2 e 3 fatôres comuns aos três números dados, segue-se que êsses números são divisíveis pelo produto $2^2 \times 3$. Assim, $2^2 \times 3 = 12$ é um divisor comum dos números propostos. Por outro lado, verificamos também que êsse divisor comum é o maior que podem ter êsses números, uma vez que se tomássemos um outro fator qualquer não comum ou aumentássemos de uma unidade o expoente de um dêles, o produto resultante não dividiria os números que não tivessem na sua composição êsse fator.

162. **Regra.** — *Para calcular o m. d. c. de dois ou mais números decompostos em fatôres primos, forma-se o produto dos fatôres primos comuns a todos os números dados, tomado cada um dêles com seu menor expoente.*

Exemplo: calcular mediante a decomposição em fatôres primos o m. d. c. dos números

120, 180 e 210.

Aplicando a regra encontramos

120	2	180	2	210	2
60	2	90	2	105	3
30	2	45	3	35	5
15	3	15	3	7	7
5	5	5	5	1	
1		1			

$120 = 2^3 \times 3 \times 5$
$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$
$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$

m. d. c. de (120, 180 e 210) = $= 2 \times 3 \times 5 = 30$

163. **Exercícios.**

1.	M. d. c. de 85 e 108.	R. 1.
2.	M. d. c. de 130 e 154.	R. 2.
3.	M. d. c. de 297 e 420.	R. 3.
4.	M. d. c. de 1 092 e 2 420.	R. 4.
5.	M. d. c. de 1 320 e 2 275.	R. 5.
6.	M. d. c. de 1 428 e 2 970.	R. 6.
7.	M. d. c. de 1 596 e 5 005.	R. 7.
8.	M. d. c. de 1 840 e 5 016.	R. 8.
9.	M. d. c. de 1 980 e 5 031.	R. 9.
10.	M. d. c. de 2 090 e 5 590.	R. 10.
11.	M. d. c. de 2 532 e 6 036.	R. 12.
12.	M. d. c. de 3 345 e 6 015.	R. 15.

13.	M. d. c. de 5 526 e 5 598.	R. 18.
14.	M. d. c. de 8 020 e 8 180.	R. 20.
15.	M. d. c. de 9 624 e 10 104.	R. 24.
16.	M. d. c. de 11 190 e 12 030.	R. 30.
17.	M. d. c. de 12 132 e 12 492.	R. 36.
18.	M. d. c. de 12 440 e 13 240.	R. 40.
19.	M. d. c. de 16 850 e 28 550.	R. 50.
20.	M. d. c. de 123 875 e 128 875.	R. 125.

164. **M. d. c. de vários números.** — Para se obter o m. d. c. de vários números, procura-se o m. d. c. de dois dentre êles; depois, procura-se o m. d. c. dêsse m. d. c. e um terceiro número; depois, procura-se o m. d. c. dêsse m. d. c. e um quarto número, prosseguindo-se assim até serem considerados todos os números propostos.

Exemplo: Achar o m. d. c. dos números 528, 624, 120 e 168. Aplicando a regra, encontramos

m. d. c. (528 e 624) = 48.
m. d. c. (48 e 120) = 24.
m. d. c. (24 e 168) = 24.

Portanto:

m. d. c. (528, 624, 120 e 168) = 24.

165. **Cálculo abreviado.** — Em alguns casos simples, o m. d. c. de dois ou mais números pode ser obtido mentalmente, como veremos nos exemplos que seguem.

1.º *Achar mentalmente o m. d. c. dos números 6, 12 e 18.*

O m. d. c. procurado não podendo ser maior que o menor dos números dados, verificamos mentalmente se 6 divide exatamente 12 e 18. Como isso acontece, segue-se que 6 é o m. d. c. procurado.

2.º *Achar mentalmente o m. d. c. dos números 15, 20 e 30.*

Verificamos mentalmente se 15 divide exatamente 20 e 30. Como 15 não divide 20, segue-se que 15 não pode ser o m. d. c. procurado.

Verificamos se o maior divisor de 15, diferente de 15, que é 5, divide exatamente 20 e 30. Como 5 divide exatamente 15, 20 e 30, segue-se que 5 é o m. d. c. procurado.

166. **Regra.** — *Para se obter o m. d. c. de vários números pequenos, verifica-se mentalmente se o menor dêles divide exatamente os demais. Se não os dividir, ensaiam-se sucessivamente os divisores do número menor, tomados em sua ordem natural decrescente, até encontrar um dêles que divida exatamente os números propostos. O número assim obtido é o m. d. c. procurado.*

167. **Exercícios.**

1. M. d. c. de 168, 264 e 312. R. 24.
2. M. d. c. de 234, 342 e 414. R. 18.
3. M. d. c. de 348, 372 e 444. R. 12.
4. M. d. c. de 423, 477 e 531. R. 9.
5. M. d. c. de 560, 623 e 840. R. 7.
6. M. d. c. de 576, 660 e 708. R. 12.
7. M. d. c. de 690, 943 e 1 150. R. 23.
8. M. d. c. de 923, 949 e 1 079. R. 13.
9. M. d. c. de 1 080, 1 512 e 1 800. R. 72.
10. M. d. c. de 1 617, 1 694 e 1 848. R. 77.
11. M. d. c. de 2 046, 2 511 e 2 790. R. 93.
12. M. d. c. de 28, 40, 88 e 146. R. 2.
13. M. d. c. de 44, 64, 412 e 508. R. 4.
14. M. d. c. de 1 115, 2 007, 2 899 e 4 460. R. 223.
15. M. d. c. de 2 410, 4 097, 5 543 e 6 989. R. 241.
16. Quais são os divisores comuns dos números 270 e 252? R. 1, 2, 3, 6, 9 e 18.
17. Quais são os divisores comuns dos números 420 e 330? R. 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 e 20.
18. Quais são os divisores comuns dos números 7 657, 806 e 529? R. 1, 13, 31 e 402.
19. Quais são os divisores comuns dos números 840, 750, 600 e 495? R. 1, 3, 5 e 15.
20. Quantos divisores comuns têm os números 120 e 180? R. 12.
21. Quantos divisores comuns têm os números 4 620 e 13 068?
22. Quantos divisores comuns têm os números 2 592, 2 178 e 874? R. 6.

23. Dentre os divisores comuns dos números 1 476 e 984 quais são os múltiplos de 3? R. 3, 6, 12, 123, 246 e 492.
24. Dentre os divisores comuns dos números 1 632 e 2 584 quais são os múltiplos de 4? R. 4, 8, 68 e 136.
25. Dentre os divisores comuns dos números 120, 180 e 300 quais os divisíveis por 5? R. 5, 10, 15, 20, 30 e 60.
26. Quais os dois menores números pelos quais devemos dividir 252 e 324 para que os quocientes obtidos sejam iguais? R. 7 e 9.
27. Quais os três menores números pelos quais devemos dividir 192, 240 e 336 para que os quocientes obtidos sejam iguais? R. 4, 5 e 7.
28. Na pesquisa do m. d. c. de dois números por divisões sucessivas encontram-se os quocientes 1, 5 e 2 e os restos 48, 24 e 0. Calcular os dois números. R. 312 e 264.
29. O m. d. c. de dois números é 5 e os quocientes encontrados por divisões sucessivas são 4, 1, 5 e 6. Quais são os números? R. 895 e 185.
30. O m. d. c. de dois números é 18 e os quocientes encontrados em sua pesquisa por divisões sucessivas são 2, 4, 1, 9 e 3. Quais são os números? R. 6 030 e 2 736.

CAPÍTULO XI

MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM

168. **Múltiplos comuns.** — Um número diz-se *múltiplo comum* de dois ou mais outros quando é múltiplo de cada um dêles.

Exemplo: os números

$$5, \quad 6 \quad e \quad 10$$

apresentam os seguintes múltiplos comuns

$$30, \quad 60, \quad 90, \quad 120, \quad 150 \quad \ldots$$

169. **Mínimo múltiplo comum.** — Ao menor dos múltiplos comuns de dois ou mais números dá-se a denominação de mínimo múltiplo comum dêsses números.

Mínimo múltiplo comum de dois ou mais números é o menor dos seus múltiplos comuns.

Indica-se o mínimo múltiplo comum de dois ou mais números com o símbolo *m. m. c.*

Assim, dados os números 5, 6 e 10, temos

$$\text{m. m. c.} \quad (5, \quad 6 \quad e \quad 10) = 30.$$

170. **Pesquisa do m. m. c. de vários números.** — Recordemos que para um número ser divisível por outro é necessário e suficiente que contenha todos os fatôres primos dêsse outro elevados, pelo menos, à mesma potência.

Fundados nêsse princípio, podemos fàcilmente estabelecer a regra para a pesquisa do m. m. c. de vários números.

Consideremos, para isso, os números 18, 24 e 30.

Decompondo-os em seus fatôres primos encontramos

$$18 = 2 \times 3^2,$$
$$24 = 2^3 \times 3,$$
$$30 = 2 \times 3 \times 5.$$

Os múltiplos comuns dos números propostos devem conter os fatôres que figuram na composição de cada um dêles, elevados, pelo menos, à mesma potência. Assim, o m. m. c. dos números dados deverá conter exclusivamente tais fatôres. — Portanto:

$$\text{m. m. c. de} \quad (18, \quad 24, \quad 30) = 2^3 \times 3^2 \times 5.$$

171. **Regra.** — *Para se obter o m. m. c. de dois ou mais números, depois de decompostos em seus fatôres primos, forma-se o produto dos fatôres primos comuns e não comuns de todos os números dados, tomado cada um dêles com seu maior expoente.* —

Exemplo: achar, pela decomposição em fatôres primos, o m. m. c. dos números 180, 270 e 360.

Aplicando a regra dada acima, encontramos

$$\begin{array}{r|l}180 & 2\\ 90 & 2\\ 45 & 3\\ 15 & 3\\ 5 & 5\\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l}270 & 2\\ 135 & 3\\ 45 & 3\\ 15 & 3\\ 5 & 5\\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l}360 & 2\\ 180 & 2\\ 90 & 2\\ 45 & 3\\ 15 & 3\\ 5 & 5\\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{|l|}180 = 2^2 \times 3^2 \times 5\\ 270 = 2 \times 3^3 \times 5\\ 360 = 2^3 \times 3^2 \times 5.\end{array} \qquad \begin{array}{l}\text{m. m. c. de } (180,\\ 270 \text{ e } 360) =\\ = 2^3 \times 3^3 \times 5 =\\ = 1\,080.\end{array}$$

172. **Observação.** — *Quando dois números são primos entre si, o m. m. c. de ambos é igual ao produto dêles.*

Com efeito não contendo os números dados fatôres comuns diferentes da unidade, segue-se que o m. m. c. dêsses números deverá conter todos os fatôres primos que figuram na composição de ambos.

Do mesmo modo, verifica-se também que, quando vários números são primos entre si dois a dois, o m. m. c. dêsses números é igual ao produto de todos êles.

173. **Relação entre o m. d. c. e o m. m. c.** — Consideremos os números 60 e 36.

Decompondo-os em seus fatôres primos, encontraremos

$$60 = 2^2 \times 3 \times 5,$$
$$36 = 2^2 \times 3^2.$$

Tendo em vista que o m. m. c. dos dois números dados é o produto das mais altas potências dos fatôres primos de ambos, verificamos que para obter êsse m. m. c. bastará multiplicar um dos números dados pelos fatôres primos do outro que nêle não figuram.

No caso presente, multiplicando 36 por 5, encontraremos o m. m. c. dêsses números (180).

Mas, considerando que o m. d. c. dos números dados é o produto das mais baixas potências dos fatôres comuns dêsses números, segue-se que dividindo um dêles (60) pelo m. d. c. de ambos (12) o quociente obtido conterá os fatôres primos que não figuram no outro.

Assim, para multiplicar um dos números propostos pelos fatôres primos do outro e que não entram em sua composição basta multiplicar o primeiro pelo quociente do segundo pelo m. d. c. de ambos.

As considerações expendidas conduzem-nos à conclusão seguinte:

O produto de dois números quaisquer é igual ao produto do seu máximo divisor comum pelo mínimo múltiplo comum.

Esta notável relação pode ser aplicada com vantagem na prática. — Exemplo:

Calcular o m. m. c. de 90 e 120.

Procurando o m. d. c. dêsses números, encontraremos

$$\text{m. d. c.} \quad (90 \quad \text{e} \quad 120) = 30.$$

Aplicando a regra dada acima, obteremos

$$\text{m. m. c.} \quad (90 \quad \text{e} \quad 120) = 90 \times (120 : 30) = 90 \times 4 = 360.$$

174. **Propriedades.** — 1.ª *Se vários números forem multiplicados ou divididos por outro o seu m. m. c. ficará também multiplicado ou dividido por êsse mesmo número.*

Assim, dado

$$\text{m. m. c.} \quad (60,\ 90 \text{ e } 120) = 360;$$

dizemos que

$$\text{m. m. c.} \quad (60 \times 2, \quad 90 \times 2 \quad \text{e} \quad 120 \times 2) = 360 \times 2,$$

$$\text{m. m. c.} \quad (60 : 2, \quad 90 : 2 \quad \text{e} \quad 120 : 2) = 360 : 2.$$

Com efeito, quando multiplicamos dois ou mais números pelo mesmo número, passa êste a figurar como fator na composição de

cada um dos primeiros, e, conseqüentemente, o m. m. c. dos produtos considerados deverá também conter êsse fator.

Por outro lado, quando dividimos dois ou mais números pelo mesmo número, o divisor considerado é um fator que fica cancelado da composição dos números dados e, conseqüentemente, o m. m. c. dos quocientes não poderá conter êsse fator.

2.ª *Dividindo-se o m. m. c. de vários números por cada um dêstes, os quocientes resultantes são números primos entre si.*

Exemplo: sendo

$$\text{m. m. c.} \quad (60, \quad 90 \quad \text{e} \quad 120) = 360,$$

temos

$$360 : 60 = 6; \quad 360 : 90 = 4; \quad 360 : 120 = 3;$$

os quocientes 6, 4 e 3 são números primos entre si.

175. **Cálculo abreviado.** — Em certos casos simples o m. m. c. de dois ou mais números pode ser obtido mentalmente, como veremos nos exemplos que seguem.

1.º *Achar o m. m. c. dos números 6, 12 e 24.*

O m. m. c. procurado não podendo ser menor que o maior dos números dados, verificamos se 24 é divisível por 6 e por 12. Como isso acontece, 24 é o m. m. c. procurado.

2.º *Achar o m. m. c. dos números 9, 12 e 18.*

Verificamos se 18 é divisível por 9 e 12. Como 18 não é divisível por 12, segue-se que 18 não pode ser o m. m. c. procurado. Verificamos se o menor múltiplo de 18, diferente de 0 e 18, que é 36, é divisível exatamente pelos números propostos. Como 36 é divisível por 9, 12 e 18, é o m. m. c. procurado.

Outros exemplos poderíamos aduzir a fim de justificar a regra dada a seguir.

176. **Regra.** — *Para obter o m. m. c. de vários números pequenos, verifica-se se o maior dêles é divisível pelos demais. Se isso suceder, êsse número será o m. m. c. procurado. Se não o fôr, ensaiam-se sucessivamente os diversos múltiplos do maior, tomados em sua ordem natural crescente, até encontrar um que seja divisível pelos números propostos. O número assim obtido será o m. m. c. dos números dados.*

177. Exercícios.

Calcular o m.m.c. dos seguintes números:

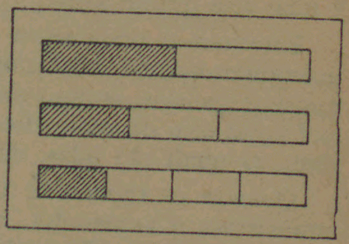
1. De 45 e 75. R. 225.
2. De 80 e 120. R. 240.
3. De 150 e 180. R. 900.
4. De 264 e 408. R. 4 488.
5. De 500 e 750. R. 1 500.
6. De 715 e 1 001. R. 5 005.
7. De 837 e 1 023. R. 9 207.
8. De 1 309 e 847. R. 14 399.
9. De 1 476 e 984. R. 2 952.
10. De 4 620 e 4 356. R. 152 460.
11. De 6 30 e 3 120. R. 327 600.
12. De 6 525 e 3 825. R. 110 925.
13. De 18, 30 e 48. R. 720.
14. De 20, 30 e 56. R. 2 520.
15. De 36, 54 e 90. R. 540.
16. De 60, 84 e 132. R. 4 620.
17. De 90, 180 e 450. R. 900.
18. De 1 292, 1 938 e 2 584. R. 7 752.
19. De 1 470, 1 225 e 1 050. R. 7 350.
20. De 27, 36, 49 e 54. R. 5 292.
21. De 30, 32, 36, 41 e 72. R. 59 040.
22. Quais os números compreendidos entre 100 e 300 divisíveis ao mesmo tempo por 6, 9 e 15? R. 180 e 270.
23. Quais os números de três algarismos divisíveis ao mesmo tempo por 8, 9 e 10? R. 360 e 720.
24. Quantos números há de três algarismos divisíveis por 63 e por 84? R. 3.
25. Quais os dois menores números pelos quais devemos multiplicar 30 e 54 para que os produtos obtidos sejam iguais? R. 9 e 5.
26. Quais os menores números pelos quais devemos multiplicar 45 e 72 a fim de obter produtos iguais? R. 8 e 5.
27. Calcular o número que, dividido por 12, 40 e 60 deixa sempre o mesmo resto 5. R. 125.
28. Calcular o m.m.c. de dois números, sabendo-se que seu produto é 31 500 e que o m.d.c. de ambos é 30. R. 1 050.
29. O m.d.c. de dois números é 18 e o m.m.c. é 216. Calcular um dos números, sabendo-se que o outro é 54. R. 72.
30. Dois ciclistas correm sôbre uma pista circular, partindo ao mesmo tempo de uma mesma linha. O primeiro realiza uma volta completa em 30 minutos e o segundo em 36 minutos. Quantas voltas deverá dar cada um para que tornem a encontrar-se sôbre a linha de partida? R. 6 e 5.

CAPÍTULO XII

FRAÇÕES ORDINÁRIAS: COMPARAÇÃO, SIMPLIFICAÇÃO, REDUÇÃO AO MESMO DENOMINADOR

178. Noção de fração. — Consideremos a régua de madeira vista na figura a seguir. Imaginando-a cortada em duas, em três, em quatro,... partes iguais, poderemos dar a cada uma delas denominação especial, *metade, um têrço, um quarto*, etc.

Dizemos, então, que a metade, um têrço, um quarto são *partes alíquotas* da grandeza considerada.



Depois de dividida a régua em quatro partes iguais, se reunirmos três dessas partes formaremos outra que conterá três quartos da primeira.

Para representar a medida dessa porção da régua, temos necessidade de empregar dois números naturais: o primeiro (4) indica o número de partes em que se dividiu a régua; o segundo (3) o número de partes que foram tomadas.

Êsses números são escritos de modo que o segundo fique colocado sôbre o primeiro, sendo ambos separados por um traço:

$$\frac{3}{4},$$

O símbolo assim formado denomina-se *fração*.

179. Definições. — *Dá-se a denominação de fração a uma ou várias das partes iguais em que se divide a unidade.*

A fração é representada por dois números, escritos um sôbre o outro, separados por um traço. Denominam-se êsses números, respectivamente, *numerador* e *denominador*.

O *denominador*, escrito sob o traço, indica o número de partes em que foi dividida a unidade, no caso considerado.

O *numerador*, escrito sôbre o traço, indica o número de vêzes que a grandeza medida contém essas partes.

O numerador e o denominador denominam-se têrmos da fração.

Assim, na fração

$$\frac{5}{7}$$

5 e 7 são os têrmos.

180. **Modo de ler uma fração.** — O modo comum e genérico de enunciar uma fração consiste em dizer-se o numerador e depois o denominador acompanhado da palavra *avos*. — Assim, a fração

$$\frac{7}{15}$$

é lida: sete quinze avos.

Excetuam-se dessa regra as frações com denominadores compreendidos entre 2 e 9 inclusive, as quais são lidas: *meios, terços, quartos, quintos, sextos, sétimos, oitavos* e *nonos*, e bem assim as frações com denominadores formados pela unidade seguida de zeros, as quais são lidas: *décimos, centésimos, milésimos,* etc.

Quando os têrmos de uma fração são expressos por letras, enunciamos o numerador, em seguida a palavra sôbre, e depois o denominador. — Exemplo:

$$\frac{a}{b}$$

a sôbre *b*.

181. **Comparação de fração com a unidade.** — I. Quando a grandeza que se quer medir é menor que a unidade adotada, a fração que exprime sua medida também o será. — Exemplo:

$$\frac{2}{5} < 1.$$

As frações menores que a unidade denominam-se frações próprias. — Exemplos:

$$\frac{3}{5}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8},$$

II. Por outro lado, quando a grandeza que se deseja medir é maior que a unidade adotada, também o será a fração que exprime sua medida. — Exemplo:

$$\frac{5}{2} = 1.$$

As frações maiores que a unidade são denominadas frações impróprias. — Exemplo:

$$\frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \frac{10}{7}.$$

III. Quando a grandeza que se quer medir é igual à unidade adotada, também o será a fração que exprime sua medida. — Exemplo:

$$\frac{5}{5} = 1.$$

Uma fração cujos têrmos são iguais é igual à unidade.

182. **Observação.** — 1.ª Qualquer número inteiro pode ser considerado como fração cujo denominador é a unidade. — Exemplo:

$$5 = \frac{5}{1}.$$

2.ª Quando o numerador de uma fração é múltiplo do denominador, a fração representa um número inteiro, igual ao quociente dessa divisão. — Exemplo:

$$2 = \frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \frac{16}{8} = \ldots$$

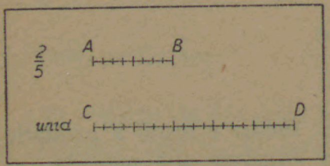
Assim, um número qualquer pode ser pôsto sob a forma de fração, bastando, para isso, tomar como numerador o produto do número dado pelo denominador que se quiser adotar para a fração. — Exemplos:

$$3 = \frac{3 \times 4}{4} = \frac{12}{4}, \quad 5 = \frac{5 \times 7}{7} = \frac{35}{7}.$$

183. **Propriedade fundamental.** — *Multiplicando-se os dois têrmos de uma fração pelo mesmo número, diferente de zero, ou di-*

vidindo-os ambos por um divisor comum, o valor da fração não se altera.

Com efeito, consideremos a porção de reta ou *segmento* AB, cuja medida é $\frac{2}{5}$ quando se toma para unidade o segmento CD, ou seja AB contém duas das cinco partes iguais em que se dividiu a unidade tomada, CD. Se dividirmos cada uma dessas partes em 4 partes iguais, a unidade CD conterá exatamente 5×4 ou 20 dessas novas partes e o segmento AB conterá, por sua vez, 2×4 ou 8 dessas partes.



Assim, a medida AB, que era inicialmente expressa pela fração $\frac{2}{5}$, passa a ser expressa pela fração $\frac{2 \times 4}{5 \times 4}$.

Conseqüentemente, as frações

$$\frac{2}{5} \text{ e } \frac{2 \times 4}{5 \times 4},$$

ou

$$\frac{2}{5} \text{ e } \frac{8}{20},$$

que exprimem a medida de uma mesma grandeza quando se toma a mesma unidade, são iguais. Invertendo-se a ordem das considerações acima, verifica-se ser também verdadeira a 2.ª parte do enunciado.

184. **Simplificação de frações.** — Simplificar uma fração é reduzi-la a outra igual, cujos têrmos sejam respectivamente menores que os da fração dada. — Consideremos a fração

$$\frac{210}{315},$$

cujos têrmos apresentam fatôres comuns.

De acôrdo com a propriedade fundamental, dividamos os têrmos da fração dada por um divisor comum. — Encontraremos, sucessivamente:

$$\frac{210}{315} = \frac{210 : 3}{315 : 3} = \frac{70}{105} = \frac{70 : 5}{105 : 5} = \frac{14}{21} = \frac{14 : 7}{21 : 7} = \frac{2}{3}.$$

Assim, *para simplificar uma fração dividem-se os seus têrmos por um divisor comum.*

185. **Fração irredutível.** — No exemplo anterior, encontramos, sucessivamente, as frações

$$\frac{210}{315} = \frac{70}{105} = \frac{14}{21} = \frac{2}{3},$$

tôdas iguais entre si.

A última fração obtida

$$\frac{2}{3}$$

não pode ser simplificada, por isso que os seus têrmos são números primos entre si. — Diz-se, então, que a fração considerada é irredutível, isto é, que está reduzida à sua expressão mais simples.

Uma fração é irredutível quando os seus têrmos são números primos entre si. — Exemplos:

$$\frac{2}{5}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{8}{15}.$$

186. **Redução de fração à expressão mais simples.** — A redução de uma fração à sua expressão mais simples pode ser obtida:

1.º *Por simplificações sucessivas.*

2.º *Pela divisão dos seus têrmos pelo m. d. c. de ambos.*

Com efeito, dada a fração

$$\frac{18}{30},$$

encontramos, sucessivamente,

$$\frac{18}{30} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}.$$

Por outro lado, consideremos a fração

$$\frac{60}{90}.$$

Procurando o m. d. c. dos têrmos da fração, encontramos

$$\text{m. d. c. } (60 \text{ e } 90) = 30.$$

Dividindo os têrmos da fração dada por 30, obtemos

$$\frac{60}{90} = \frac{2}{3}.$$

Na prática, geralmente dá-se preferência ao processo das simplificações sucessivas.

187. Exercícios.

Reduzir à expressão mais simples as frações seguintes:

1. $\frac{36}{48}$	R. $\frac{3}{4}$	11. $\frac{295}{354}$	R. $\frac{5}{6}$
2. $\frac{60}{84}$	R. $\frac{5}{7}$	12. $\frac{624}{816}$	R. $\frac{13}{17}$
3. $\frac{72}{88}$	R. $\frac{9}{11}$	13. $\frac{708}{732}$	R. $\frac{59}{61}$
4. $\frac{140}{180}$	R. $\frac{7}{9}$	14. $\frac{484}{1\,089}$	R. $\frac{4}{9}$
5. $\frac{96}{264}$	R. $\frac{4}{11}$	15. $\frac{1\,086}{1\,991}$	R. $\frac{6}{11}$
6. $\frac{147}{245}$	R. $\frac{3}{5}$	16. $\frac{1\,184}{1\,517}$	R. $\frac{32}{41}$
7. $\frac{120}{150}$	R. $\frac{4}{5}$	17. $\frac{1\,310}{1\,834}$	R. $\frac{5}{7}$
8. $\frac{254}{635}$	R. $\frac{2}{5}$	18. $\frac{1\,078}{2\,695}$	R. $\frac{2}{5}$
9. $\frac{273}{315}$	R. $\frac{13}{15}$	19. $\frac{1\,323}{1\,575}$	R. $\frac{21}{25}$
10. $\frac{327}{436}$	R. $\frac{3}{4}$	20. $\frac{1\,650}{2\,376}$	R. $\frac{25}{36}$

188. **Redução de frações ao mesmo denominador.** — Reduzir duas ou mais frações a um denominador comum significa obter outras tantas frações respectivamente iguais às dadas e que tenham denominadores iguais entre si.

Consideremos as frações

$$\frac{2}{3}, \quad \frac{3}{4} \quad \text{e} \quad \frac{4}{5}.$$

Multiplicando os têrmos da primeira por 4×5, os da segunda por 3×5 e os da terceira por 3×4, encontramos

$$\frac{2 \times 4 \times 5}{3 \times 4 \times 5}, \quad \frac{3 \times 3 \times 5}{4 \times 3 \times 5}, \quad \frac{4 \times 3 \times 4}{5 \times 3 \times 4}.$$

De acôrdo com a propriedade fundamental, as frações obtidas são respectivamente iguais às frações dadas. — Assim:

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 4 \times 5}{3 \times 4 \times 5} = \frac{40}{60}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 3 \times 5}{4 \times 3 \times 5} = \frac{45}{60}$$

$$\frac{4}{5} = \frac{4 \times 3 \times 4}{5 \times 3 \times 4} = \frac{48}{60}.$$

As frações dadas ficaram, dêsse modo, reduzidas ao mesmo denominador (60).

Assim, para reduzir várias frações a um denominador comum, é bastante multiplicar os têrmos de cada uma pelo produto dos denominadores das demais.

189. **Redução ao mínimo denominador comum.** — O denominador comum de duas ou mais frações deve ser múltiplo de todos os denominadores. Para obter frações, respectivamente iguais a duas ou mais outras, com o mesmo denominador, e cujos têrmos sejam os menores possíveis, deve-se utilizar o m. m. c. dos denominadores. Procede-se, no caso, de acôrdo com a regra dada a seguir.

190. **Regra.** — *Para reduzir duas ou mais frações ao mínimo denominador comum, reduzem-se à expressão mais simples as frações dadas; em seguida, procura-se o m. m. c. dos denominadores; depois, multiplica-se cada um dos numeradores pelo quociente do m. m. c. pelo denominador respectivo, dando-se êsse m. m. c. para denominador comum.*

Exemplo: reduzir ao mínimo denominador comum as frações

$$\frac{32}{48} \text{ e } \frac{28}{32}.$$

Reduzindo ambas à expressão mais simples, encontraremos

$$\frac{32}{48}=\frac{2}{3} \text{ e } \frac{28}{32}=\frac{7}{8}.$$

Considerando, então, as frações

$$\frac{2}{3} \text{ e } \frac{7}{8},$$

obtemos mentalmente o m. m. c. dos denominadores, ou seja,

$$\text{m. m. c. } (3 \text{ e } 8) = 24.$$

Aplicando a regra, encontraremos

$$\frac{2 \times 8}{24} \text{ e } \frac{7 \times 3}{24},$$

ou, efetuando as operações indicadas

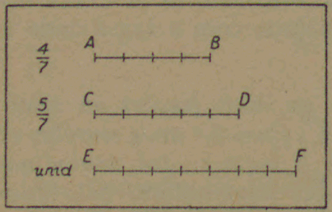
$$\frac{16}{24} \text{ e } \frac{21}{24}.$$

191. **Comparação de frações.** — Consideremos os casos seguintes:

1.º *As frações dadas têm o mesmo denominador.*

2.º *As frações dadas têm o mesmo numerador.*

3.º *As frações dadas têm numeradores e denominadores desiguais.*



a) Sejam as frações

$$\frac{4}{7} \text{ e } \frac{5}{7},$$

tendo ambas o mesmo denominador.

Representando pelo segmento EF a unidade tomada para medida dos segmentos AB e CD, verifica-se que CD, cuja medida é

$\frac{5}{7}$ é maior que AB, cuja medida é $\frac{4}{7}$, por isso que CD contém 5 partes da unidade e AB contém apenas 4, partes essas tôdas iguais entre si. — Assim,

$$\frac{5}{7} > \frac{4}{7}.$$

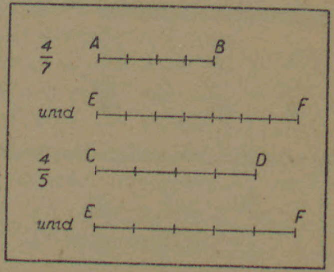
Quando duas frações têm o mesmo denominador, a maior é a que tem o maior numerador.

b) Consideremos as frações

$$\frac{4}{7} \text{ e } \frac{4}{5}$$

ambas tendo o mesmo numerador.

Representando pelo segmento EF a unidade tomada para a medida dos segmentos AB e CD, verificamos que CD, cuja medida é $\frac{4}{5}$ de EF, é maior que AB, cuja medida é $\frac{4}{7}$ de EF, por



isso que ambos contêm 4 partes da unidade, mas as partes contidas em CD são maiores que as contidas em AB. — Assim,

$$\frac{4}{5} > \frac{4}{7}.$$

Quando duas frações têm o mesmo numerador, a maior é a que tem o menor denominador.

c) Quando são dadas duas frações de numeradores e denominadores desiguais, para compará-las entre si, podemos reduzi-las ao mesmo denominador ou ao mesmo numerador, a fim de recair em um dos casos precedentes.

Na prática prefere-se sempre reduzir as frações ao mesmo *denominador*. — Exemplos:

1.º Comparar as frações

$$\frac{2}{3} \text{ e } \frac{4}{7}.$$

Reduzindo-as ao mesmo denominador, encontraremos

$$\frac{2}{3}=\frac{14}{21} \text{ e } \frac{4}{7}=\frac{12}{21}.$$

Tendo em vista que

$$\frac{14}{21}>\frac{12}{21}.$$

segue-se que

$$\frac{2}{3}>\frac{4}{7}.$$

2.º Escrever, em ordem decrescente de grandeza, as frações:

$$\frac{5}{6}, \frac{7}{12} \text{ e } \frac{11}{18}.$$

Reduzindo-as ao mesmo denominador, encontraremos

$$\frac{5}{6}=\frac{30}{36}, \quad \frac{7}{12}=\frac{21}{36} \text{ e } \frac{11}{18}=\frac{22}{36}.$$

Tendo em vista que

$$\frac{30}{36}>\frac{22}{36}>\frac{21}{36},$$

chega-se a que

$$\frac{5}{6}>\frac{11}{18}>\frac{7}{12}.$$

192. **Números mistos.** — *Damos a denominação de número misto à soma indicada de um número natural com fração menor que a unidade.* — Assim, dizemos que

$$2+\frac{3}{5} \text{ e } 7+\frac{2}{3}.$$

são números mistos.

Para simplificar a representação dos números mistos convencionou-se dispensar o emprêgo do sinal + entre a parte inteira e fracionária. — Assim, escrevemos simplesmente

$$2\frac{3}{5} \text{ e } 7\frac{2}{3}$$

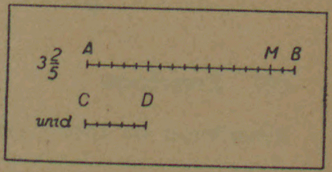
no lugar de

$$2+\frac{3}{5} \text{ e } 7+\frac{2}{3}.$$

193. **Transformação de número misto em fração imprópria.** — Consideremos o número misto

$$3\frac{2}{5}$$

que exprime a medida do segmento AB, quando se toma o segmento CD para unidade, como se vê na figura a seguir. Se dividirmos cada um dos segmentos iguais à unidade em 5 partes iguais verificaremos que o segmento AM, que corresponde à parte inteira do número misto (3) ficará dividido em 3×5 ou 15 quintos da unidade. O segmento todo AB conterá, em conseqüência, $(3 \times 5 + 2)$ ou 17 quintos da unidade.



Temos, assim,

$$3\frac{2}{5}=\frac{3\times 5+2}{5}=\frac{17}{5}.$$

194. **Regra.** — *Para reduzir número misto a fração imprópria, dá-se para numerador o produto do inteiro pelo denominador da fração do número misto, mais o seu numerador, e para denominador o próprio denominador dessa fração.* — Exemplo:

$$4\frac{5}{6}=\frac{4\times 6+5}{6}=\frac{24+5}{6}=\frac{29}{6}.$$

195. Transformação de fração imprópria em número misto. — Seja a fração imprópria

$$\frac{17}{5}.$$

Considerando, ainda, a figura anterior, verificamos que o segmento AB, cuja medida é $\frac{17}{5}$, conterá 3 unidades mais dois quintos, da unidade, uma vez que cada unidade contém 5 quintos. — Resulta, então, que

$$\frac{17}{5} = 17 : 5 = 3 + \frac{2}{5} = 3\frac{2}{5}.$$

196. Regra. — *Para reduzir fração imprópria a número misto, efetua-se a divisão do numerador pelo denominador, tomando-se o quociente dessa divisão para parte inteira do número misto, o resto para numerador da fração própria que o acompanha e o divisor para denominador dessa fração.* — Exemplo:

$$\frac{43}{8} = 43 : 8 = 5 + \frac{3}{8} = 5\frac{3}{8}.$$

197. Exercícios.

Transformar em frações impróprias os números mistos seguintes:

1. $3\frac{1}{3}$	R. $\frac{10}{3}$	6. $12\frac{11}{12}$	R. $\frac{155}{12}$
2. $4\frac{2}{5}$	R. $\frac{22}{5}$	7. $15\frac{1}{13}$	R. $\frac{196}{13}$
3. $7\frac{3}{8}$	R. $\frac{59}{8}$	8. $20\frac{1}{25}$	R. $\frac{501}{25}$
4. $10\frac{1}{9}$	R. $\frac{91}{9}$	9. $35\frac{11}{23}$	R. $\frac{816}{23}$
5. $11\frac{4}{7}$	R. $\frac{81}{7}$	10. $49\frac{7}{15}$	R. $\frac{742}{15}$.

Transformar em números mistos as frações impróprias seguintes:

11. $\frac{29}{7}$	R. $4\frac{1}{7}$	16. $\frac{323}{20}$	R. $16\frac{3}{20}$
12. $\frac{23}{3}$	R. $7\frac{2}{3}$	17. $\frac{233}{12}$	R. $19\frac{5}{12}$
13. $\frac{65}{7}$	R. $9\frac{2}{7}$	18. $\frac{129}{4}$	R. $32\frac{1}{4}$
14. $\frac{101}{9}$	R. $11\frac{2}{9}$	19. $\frac{4\,331}{12}$	R. $360\frac{11}{12}$
15. $\frac{31}{2}$	R. $15\frac{1}{2}$	20. $\frac{1\,663}{4}$	R. $415\frac{3}{4}$.

CAPÍTULO XIII

OPERAÇÕES FUNDAMENTAIS COM FRAÇÕES ORDINÁRIAS

198. **Adição de frações.** — I. Consideremos primeiramente o caso em que as frações dadas têm denominadores iguais.

Seja efetuar a soma seguinte:

$$\frac{3}{7}+\frac{2}{7}+\frac{1}{7}.$$

Indicando o denominador comum (7) que cada uma das frações dadas representa certo número de *partes iguais* da unidade (sétimos), segue-se que para obtermos o total dessas partes basta somar os numeradores. — Portanto:

$$\frac{3}{7}+\frac{2}{7}+\frac{1}{7}=\frac{6}{7}.$$

Assim, para somar frações que têm o mesmo denominador, somam-se os numeradores, escrevendo-se o total obtido sôbre o mesmo denominador comum das frações dadas.

II. Consideremos agora o caso em que as frações dadas têm denominadores desiguais.

Seja efetuar a soma

$$\frac{2}{3}+\frac{4}{5}.$$

Indicando os denominadores (3 e 5) que cada uma das frações propostas representa partes desiguais da unidade, segue-se evidentemente que não poderemos somá-las, sem prèviamente reduzi-las ao mesmo denominador.

Reduzindo ao mínimo denominador comum, vem

$$\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{10}{15}+\frac{12}{15}=\frac{10+12}{15}=\frac{22}{15}=1\frac{7}{15}.$$

199. **Regra.** — *Para somar frações que têm denominadores diferentes, reduzem-se as frações dadas ao mesmo denominador, depois somam-se os numeradores das frações resultantes, escrevendo-se o total obtido sôbre o denominador comum das frações consideradas.* — Exemplo:

$$\frac{4}{5}+\frac{5}{12}+\frac{7}{15}=\frac{48}{60}+\frac{25}{60}+\frac{28}{60}=\frac{101}{60}=1\frac{41}{60}.$$

200. **Adição de números mistos.** — Consideremos a adição indicada

$$4\frac{2}{5}+3\frac{3}{4}.$$

Para efetuá-la, poderíamos transformar os números mistos dados em fração e depois aplicar a regra conhecida.

Entretanto, para maior simplicidade do cálculo, somam-se primeiramente as frações, extraindo-se, se houver, os inteiros da soma obtida; somam-se depois as partes inteiras, juntando-se ao total obtido os inteiros encontrados na soma das frações. — Exemplo:

$$4\frac{2}{5}+3\frac{3}{4}=4+3+\frac{2}{5}+\frac{3}{4}=4+3+\frac{8}{20}+\frac{15}{20}=$$

$$=4+3+\frac{23}{20}=4+3+1\frac{3}{20}=8\frac{3}{20}.$$

201. **Exercícios.**

Efetuar as operações seguintes:

1. $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}.$ R. $1\frac{11}{12}.$
2. $\frac{3}{4}+\frac{4}{7}+\frac{1}{2}.$ R. $1\frac{23}{28}.$

3. $\frac{5}{9}+\frac{7}{8}+\frac{5}{6}$. R. $2\frac{19}{72}$.

4. $\frac{3}{5}+\frac{7}{8}+\frac{2}{3}$. R. $2\frac{17}{120}$.

5. $\frac{5}{12}+\frac{7}{15}+\frac{3}{20}$. R. $1\frac{1}{30}$.

6. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$. R. $1\frac{17}{60}$.

7. $\frac{1}{2}+\frac{5}{9}+\frac{4}{5}+\frac{2}{3}$. R. $2\frac{47}{90}$.

8. $\frac{5}{6}+\frac{5}{12}+\frac{5}{18}+\frac{5}{24}$. R. $1\frac{53}{72}$.

9. $\frac{7}{8}+\frac{11}{12}+\frac{15}{16}+\frac{19}{20}$. R. $3\frac{163}{240}$.

10. $\frac{1}{18}+\frac{5}{24}+\frac{7}{36}+\frac{11}{42}$. R. $\frac{121}{168}$.

11. $\frac{5}{7}+\frac{9}{14}+\frac{11}{21}+\frac{13}{35}$. R. $2\frac{53}{210}$.

12. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$. R. $1\frac{9}{20}$.

13. $\frac{5}{9}+\frac{2}{7}+\frac{5}{6}+\frac{3}{8}+\frac{2}{3}$. R. $2\frac{361}{504}$.

14. $\frac{11}{13}+\frac{5}{12}+\frac{1}{6}+\frac{3}{26}+\frac{1}{3}$. R. $1\frac{137}{156}$.

15. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$. R. $1\frac{83}{140}$.

16. $2\frac{1}{3}+3\frac{1}{4}+5\frac{1}{6}$. R. $10\frac{3}{4}$.

17. $3\frac{1}{7}+4\frac{5}{14}+2\frac{8}{21}$. R. $9\frac{37}{42}$.

18. $5+2\frac{5}{12}+3\frac{1}{6}+\frac{2}{9}$. R. $10\frac{29}{36}$.

19. $6+\frac{11}{15}+3\frac{2}{5}+\frac{7}{12}+\frac{5}{9}$. R. $11\frac{49}{180}$.

20. $12+3\frac{3}{20}+1\frac{7}{30}+\frac{4}{15}+11$. R. $27\frac{13}{20}$.

202. Subtração. — I. Consideremos primeiramente o caso em que as frações dadas têm denominadores iguais:

$$\frac{5}{7}-\frac{2}{7}.$$

Indicando o denominador comum que cada uma das frações propostas representa um certo número de *partes iguais* da unidade (sétimos), segue-se evidentemente que para obtermos a diferença dessas partes basta subtrair os numeradores. — Portanto:

$$\frac{5}{7}-\frac{2}{7}=\frac{5-2}{7}=\frac{3}{7}.$$

Assim, para subtrair frações que têm o mesmo denominador, subtraem-se os numeradores, escrevendo-se a diferença obtida sôbre o mesmo denominador comum das frações dadas. —

II. Consideremos agora o caso em que as frações dadas têm denominadores desiguais.

Seja efetuar a diferença

$$\frac{7}{8}-\frac{5}{6}.$$

Os denominadores, 8 e 6, indicam que as frações dadas representam partes desiguais da unidade. — Assim, é evidente que, para efetuar a subtração indicada, as frações devem ser prèviamente reduzidas ao mesmo denominador.

Reduzindo-as ao mínimo denominador comum vem

$$\frac{7}{8}-\frac{5}{6}=\frac{21}{24}-\frac{20}{24}=\frac{21-20}{24}=\frac{1}{24}.$$

203. Regra. — *Para subtrair frações que têm denominadores diferentes, reduzem-se as frações dadas ao mesmo denominador, depois calcula-se a diferença dos numeradores das frações resultantes e escreve-se essa diferença sôbre o denominador comum das frações consideradas.* — Exemplo:

$$\frac{7}{15}-\frac{5}{12}=\frac{28}{60}-\frac{25}{60}=\frac{3}{60}=\frac{1}{20}.$$

204. Exercícios.

Efetuar as operações seguintes:

1. $\frac{3}{8} - \frac{2}{7}$. R. $\frac{5}{56}$.
2. $\frac{11}{12} - \frac{7}{9}$. R. $\frac{5}{36}$.
3. $\frac{4}{15} - \frac{3}{20}$. R. $\frac{7}{60}$.
4. $\frac{5}{12} - \frac{6}{15}$. R. $\frac{1}{60}$.
5. $\frac{11}{20} - \frac{13}{30}$. R. $\frac{7}{60}$.
6. $\frac{17}{36} - \frac{11}{60}$. R. $\frac{13}{45}$.
7. $\frac{21}{62} - \frac{20}{93}$. R. $\frac{23}{186}$.
8. $\frac{7}{72} - \frac{5}{96}$. R. $\frac{13}{288}$.
9. $4 - \frac{2}{3}$. R. $3\frac{1}{3}$.
10. $3\frac{1}{4} - 2\frac{1}{3}$. R. $\frac{11}{12}$.
11. $5\frac{1}{6} - 3\frac{1}{9}$. R. $2\frac{1}{18}$.
12. $10\frac{3}{4} - 5\frac{1}{12}$. R. $5\frac{2}{3}$.
13. $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12}$. R. $\frac{5}{12}$.
14. $\frac{3}{4} + \frac{1}{3} - \frac{5}{6}$. R. $\frac{1}{4}$.
15. $\frac{5}{6} - \frac{3}{4} + \frac{2}{9}$. R. $\frac{11}{36}$.
16. $\frac{5}{9} - \frac{3}{8} + \frac{5}{72}$. R. $\frac{1}{4}$.

17. $\frac{5}{6} + \frac{2}{5} - \frac{7}{18}$. R. $\frac{38}{45}$.
18. $\frac{7}{36} + \frac{11}{48} - \frac{13}{72}$. R. $\frac{35}{144}$.
19. $2\frac{5}{12} + 3\frac{1}{6} - 4\frac{5}{9}$. R. $1\frac{1}{36}$.
20. $3\frac{2}{5} + 2\frac{1}{6} - 4\frac{7}{15}$. R. $1\frac{1}{10}$.

205. Multiplicação. — I. Consideremos primeiramente a multiplicação de fração por número inteiro.

$$\frac{2}{5} \times 3.$$

De acôrdo com a definição de produto de números naturais, que é válida quando o multiplicador é número inteiro, concluímos que para multiplicar a fração dada por 3 basta formar a soma

$$\frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5}.$$

Efetuando-a pela conhecida regra, encontramos

$$\frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{2+2+2}{5} = \frac{2 \times 3}{5} = \frac{6}{5}.$$

Temos, portanto,

$$\frac{2}{5} \times 3 = \frac{2 \times 3}{5} = \frac{6}{5}.$$

Assim, para multiplicar uma fração por número inteiro, multiplica-se o numerador pelo inteiro e dá-se ao produto o denominador da fração.

Quando se multiplica o numerador de uma fração por certo número a fração fica multiplicada por êsse número.

Por outro lado, quando se multiplica o denominador de uma fração por certo número a fração fica dividida por êsse número.

II. Consideremos agora a multiplicação de número inteiro por fração.

Seja efetuar o produto

$$2 \times \frac{3}{4}.$$

De acôrdo com a noção de múltiplo de parte alíquota de uma grandeza, para obter-se o produto de uma grandeza por uma fração, basta dividir a grandeza em tantas partes iguais como indica o denominador da fração e tomar tantas delas quantas são as unidades do numerador.

Assim, se dividirmos por 4 um segmento cuja medida é 2, cada parte terá por medida

$$\frac{2}{4}.$$

Para tomar 3 dessas partes, multiplicamos a fração acima por 3:

$$\frac{2 \times 3}{4} = \frac{6}{4}.$$

Temos, portanto,

$$2 \times \frac{3}{4} = \frac{2 \times 3}{4} = \frac{6}{4}.$$

Assim, para multiplicar um número inteiro por fração, multiplica-se o inteiro pelo numerador e dá-se ao produto o denominador da fração.

III. Consideremos finalmente o caso geral da multiplicação de fração por fração.

Seja efetuar o produto

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}.$$

Como no caso anterior, multiplicar as duas frações dadas significa dividir a grandeza cuja medida é

$$\frac{2}{3}$$

em 5 partes iguais e tomar 4 dessas partes. — Obtemos, assim,

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{2 \times 4}{3 \times 5} = \frac{8}{15}.$$

206. **Regra.** — *Para multiplicar duas frações entre si forma-se uma fração cujo numerador é o produto dos numeradores das frações dadas e cujo denominador é o produto dos denominadores das mesmas frações.* — Exemplo:

$$\frac{4}{5} \times \frac{5}{6} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}.$$

207. **Multiplicação de números mistos.** — Consideremos o produto indicado

$$2\frac{1}{3} \times 4\frac{2}{5}.$$

Para efetuá-lo, devemos transformar os números mistos em frações impróprias e aplicar a regra. — Encontraremos, assim,

$$2\frac{1}{3} \times 4\frac{2}{5} = \frac{7}{3} \times \frac{22}{5} = \frac{154}{15} = 10\frac{4}{15}.$$

208. **Produto de várias frações.** — Consideremos o produto indicado

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7}.$$

Como no caso da multiplicação de vários números inteiros, denominamos produto de várias frações ao resultado que se obtém multiplicando a primeira pela segunda, o produto obtido pela terceira, etc.

Exemplo: a expressão

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7}$$

indica que se devem efetuar com as frações acima as operações seguintes:

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{2 \times 4}{3 \times 5}.$$

$$\frac{2 \times 4}{3 \times 5} \times \frac{6}{7} = \frac{2 \times 4 \times 6}{3 \times 5 \times 7}.$$

209. **Regra.** — *Para multiplicar várias frações, forma-se uma fração tendo para numerador o produto dos numeradores e para denominador o produto dos denominadores de tôdas as frações dadas.* — Exemplo:

$$\frac{7}{8} \times \frac{5}{9} \times \frac{3}{5} = \frac{105}{360} = \frac{7}{24}.$$

210. **Fração de fração.** — O produto indicado de uma fração por outra significa uma fração de outra fração. — Exemplo:

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$$

significa

$$\frac{4}{5} \text{ de } \frac{2}{3}.$$

Daí provém a denominação constantemente empregada no cálculo: *fração de fração.*

211. **Exercícios.**

Efetuar as operações seguintes:

1. $\frac{3}{5} \times \frac{5}{7}$. R. $\frac{3}{7}$.

2. $\frac{15}{16} \times \frac{2}{5}$. R. $\frac{3}{8}$.

3. $\frac{5}{11} \times \frac{44}{45}$. R. $\frac{4}{9}$.

4. $\frac{51}{64} \times \frac{16}{17}$. R. $\frac{3}{4}$.

5. $\frac{19}{20} \times \frac{15}{76}$. R. $\frac{3}{16}$.

6. $3\frac{1}{7} \times \frac{7}{8}$. R. $2\frac{3}{4}$.

7. $2\frac{16}{39} \times 6\frac{1}{2}$. R. $15\frac{2}{3}$.

8. $5\frac{2}{7} \times 5\frac{1}{3}$. R. $28\frac{4}{21}$.

9. $7\frac{1}{3} \times 6\frac{4}{5}$. R. $49\frac{13}{15}$.

10. $5\frac{7}{8} \times 6\frac{1}{9}$. R. $35\frac{65}{72}$.

11. $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}$. R. $\frac{1}{24}$.

12. $\frac{2}{3} \times \frac{5}{6} \times \frac{6}{7}$. R. $\frac{10}{21}$.

13. $\frac{7}{8} \times \frac{4}{11} \times \frac{11}{14}$. R. $\frac{1}{4}$.

14. $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{5}$. R. $\frac{1}{120}$.

15. $\frac{8}{9} \times \frac{7}{8} \times \frac{5}{7} \times \frac{3}{5}$. R. $\frac{1}{3}$.

16. $\frac{4}{7} \times \frac{3}{5} \times 3\frac{1}{7}$. R. $1\frac{19}{245}$.

17. $2\frac{2}{5} \times 2\frac{1}{9} \times \frac{1}{3}$. R. $1\frac{31}{45}$.

18. $3\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{4} \times 1\frac{5}{6}$. R. $14\frac{7}{16}$.

19. $4\frac{4}{5} \times 3\frac{3}{4} \times 2\frac{5}{6} \times 1\frac{1}{3}$. R. 68.

20. $5\frac{7}{8} \times 7\frac{1}{7} \times 4\frac{9}{10} \times 3\frac{5}{9}$. R. $731\frac{1}{9}$.

212. **Divisão.** — Tendo em vista a ampliação do campo numérico decorrente da introdução dos números fracionários, pode-se considerar a divisão como operação inversa da multiplicação, mesmo quando o dividendo não é múltiplo do divisor.

Vejamos, então, como se obtém o quociente de uma fração por outra. — Seja dividir

$$\frac{4}{5} \text{ por } \frac{2}{3}.$$

Para efetuar a divisão, deve-se procurar uma fração cujo produto por $\frac{2}{3}$ seja $\frac{4}{5}$.

Dizemos que a fração procurada se obtém assim:

$$\frac{4}{5} : \frac{2}{3} = \frac{4}{5} \times \frac{3}{2} = \frac{4 \times 3}{5 \times 2} = \frac{12}{10}.$$

Com efeito:

$$\frac{2}{3} \times \frac{4 \times 3}{5 \times 2} = \frac{2 \times 4 \times 3}{3 \times 5 \times 2} = \frac{4}{5}.$$

213. **Regra.** — *Para dividir uma fração por outra, multiplica-se a primeira pela segunda invertida.* — Exemplo:

$$\frac{7}{8} : \frac{5}{6} = \frac{7}{8} \times \frac{6}{5} = \frac{42}{40} = \frac{21}{20} = 1\frac{1}{20}.$$

214. **Casos particulares.** — I. *Divisão de número inteiro por fração.*

Seja dividir

$$8 \text{ por } \frac{3}{7}.$$

Dando ao dividendo o denominador 1 e aplicando a regra conhecida, encontramos

$$\frac{8}{1} : \frac{3}{7} = \frac{8}{1} \times \frac{7}{3} = \frac{56}{3} = 18\frac{2}{3}.$$

II. *Divisão de fração por número inteiro.* — Seja efetuar a divisão

$$\frac{4}{5} : 7.$$

Dando ao divisor o denominador 1 e aplicando a regra, vem

$$\frac{4}{5} : \frac{7}{1} = \frac{4}{5} \times \frac{1}{7} = \frac{4}{35}.$$

215. **Divisão de números mistos.** — Efetuar a divisão

$$3\frac{1}{4} : 2\frac{5}{7}.$$

Reduzindo os números mistos a frações impróprias e aplicando a regra da divisão de frações, encontramos

$$3\frac{1}{4} : 2\frac{5}{7} = \frac{13}{4} : \frac{19}{7} = \frac{13}{4} \times \frac{7}{19} = \frac{91}{76} = 1\frac{15}{76}.$$

216. **Exercícios.**

Efetuar as operações seguintes:

1. $\frac{10}{21} : \frac{5}{6}$. R. $\frac{4}{7}$.
2. $\frac{19}{20} : \frac{2}{15}$. R. $7\frac{1}{8}$.
3. $\frac{15}{16} : \frac{25}{28}$. R. $1\frac{1}{20}$.
4. $\frac{16}{33} : \frac{32}{55}$. R. $\frac{5}{6}$.
5. $\frac{24}{49} : \frac{12}{35}$. R. $1\frac{3}{7}$.
6. $\frac{5}{6} : 15$. R. $\frac{1}{18}$.
7. $\frac{26}{91} : 6$. R. $\frac{1}{21}$.
8. $5 : \frac{1}{2}$. R. 10.
9. $17 : \frac{3}{11}$. R. $62\frac{1}{3}$.
10. $3\frac{3}{5} : 6$. R. $\frac{3}{5}$.
11. $3\frac{1}{9} : 7$. R. $\frac{4}{9}$.
12. $10 : 2\frac{4}{7}$. R. $3\frac{8}{9}$.
13. $15 : 3\frac{1}{3}$. R. $4\frac{1}{2}$.
14. $19\frac{1}{2} : \frac{2}{3}$. R. $29\frac{1}{4}$.

15. $5 : \dfrac{3}{13}$. R. $21\dfrac{2}{3}$.

16. $2\dfrac{1}{2} : 1\dfrac{2}{7}$. R. $1\dfrac{17}{18}$.

17. $4\dfrac{1}{5} : 3\dfrac{1}{3}$. R. $1\dfrac{13}{50}$.

18. $2\dfrac{7}{9} : 3\dfrac{9}{14}$. R. $\dfrac{350}{459}$.

19. $17\dfrac{2}{5} : 15\dfrac{1}{3}$. R. $1\dfrac{31}{230}$.

20. $37\dfrac{1}{3} : 5\dfrac{1}{11}$. R. $7\dfrac{1}{3}$.

217. **Expressões fracionárias.** — Antes de efetuar operações combinadas sôbre frações devemos ter presentes as regras enunciadas a seguir, atinentes ao cálculo de expressões aritméticas.

I. *Quando são dadas multiplicações ou divisões ligadas a adições e subtrações em uma expressão aritmética; efetuam-se em primeiro lugar as multiplicações ou divisões.* — Exemplo:

$$\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}+\frac{2}{3}=\frac{15}{24}+\frac{2}{3}=\frac{15}{24}+\frac{16}{24}=\frac{31}{24}.$$

II. *Quando figuram operações indicadas entre parênteses nas expressões aritméticas, devemos efetuá-las separadamente das outras operações que não estiverem subordinadas aos mesmos.* — Exemplo:

$$\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\right)\times\frac{6}{5}-\frac{1}{2}=\left(\frac{9}{12}+\frac{8}{12}\right)\times\frac{6}{5}-\frac{1}{2}=$$

$$=\frac{17}{12}\times\frac{6}{5}-\frac{1}{2}=\frac{102}{60}-\frac{1}{2}=\frac{51}{30}-\frac{1}{2}=$$

$$=\frac{51}{30}-\frac{15}{30}=\frac{36}{30}.$$

Cuidemos agora de resolver alguns exercícios.

218. **Exercícios resolvidos.**

1.º *Calcular o valor da expressão seguinte:*

$$\left(\frac{5}{12}+7\frac{3}{4}\times 6\right)-\left(3\frac{1}{3}+2\frac{7}{12}\right).$$

Efetuando as operações na devida ordem, encontramos sucessivamente

$$\left(\frac{5}{12}+7\frac{3}{4}\times 6\right)-\left(3\frac{1}{3}+2\frac{7}{12}\right)=$$

$$=\left(\frac{5}{12}+\frac{31}{4}\times 6\right)-\left(\frac{10}{3}+\frac{31}{12}\right)=$$

$$=\left(\frac{5}{12}+\frac{186}{4}\right)-\left(\frac{10}{3}+\frac{31}{12}\right)=$$

$$=\left(\frac{5}{12}+\frac{93}{2}\right)-\left(\frac{10}{3}+\frac{31}{12}\right)=$$

$$=\left(\frac{5}{12}+\frac{558}{12}\right)-\left(\frac{40}{12}+\frac{31}{12}\right)=$$

$$=\frac{563}{12}-\frac{71}{12}=\frac{492}{12}=\frac{123}{3}=41.$$

2.º *Calcular o valor da expressão seguinte:*

$$\frac{3\dfrac{1}{2}+4\dfrac{2}{3}}{5\dfrac{1}{6}-2\dfrac{1}{2}}.$$

Efetuando separadamente as operações indicadas no numerador e denominador, vem

$$\frac{3\dfrac{1}{2}+4\dfrac{2}{3}}{5\dfrac{1}{6}-2\dfrac{1}{2}}=\frac{\dfrac{7}{2}+\dfrac{14}{3}}{\dfrac{31}{6}-\dfrac{5}{2}}=\frac{\dfrac{21}{6}+\dfrac{28}{6}}{\dfrac{31}{6}-\dfrac{15}{6}}=\frac{\dfrac{49}{6}}{\dfrac{16}{6}}.$$

Notando que a fração obtida mediante as operações efetuadas indica uma divisão, temos

$$\frac{\dfrac{49}{6}}{\dfrac{16}{6}}=\frac{49}{6}:\frac{16}{6}=\frac{49}{6}\times\frac{6}{16}=\frac{49}{16}=3\,\frac{1}{16}.$$

3.º *Calcular o valor da expressão*

$$\frac{4\dfrac{1}{3}-3\dfrac{4}{9}}{3\dfrac{1}{2}+2\dfrac{1}{3}}\times\frac{5+\dfrac{5}{6}}{2\times\dfrac{7}{9}}.$$

Procedendo de modo análogo ao do exemplo anterior, temos

$$\frac{4\dfrac{1}{3}-3\dfrac{4}{9}}{3\dfrac{1}{2}+2\dfrac{1}{3}}\times\frac{5+\dfrac{5}{6}}{2\times\dfrac{7}{9}}=\frac{\dfrac{13}{3}-\dfrac{31}{9}}{\dfrac{7}{2}+\dfrac{7}{3}}\times\frac{\dfrac{35}{6}}{\dfrac{14}{9}}=\frac{\dfrac{39}{9}-\dfrac{31}{9}}{\dfrac{21}{6}+\dfrac{14}{6}}\times\frac{\dfrac{35}{6}}{\dfrac{14}{9}}=$$

$$=\frac{\dfrac{8}{9}}{\dfrac{35}{6}}\times\frac{\dfrac{35}{6}}{\dfrac{14}{9}}=\frac{8\times 6}{9\times 35}\times\frac{35\times 9}{6\times 14}=\frac{8\times 6\times 35\times 9}{9\times 35\times 6\times 14}$$

$$=\frac{8}{14}=\frac{4}{7}.$$

219. Exercícios propostos.

Calcular o valor das expressões seguintes:

1. $\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\right)\times\frac{3}{5}.$ — R. $\frac{17}{20}.$
2. $\left(\frac{5}{6}-\frac{2}{9}\right)\times\frac{4}{11}.$ — R. $\frac{2}{9}.$

3. $\left(\frac{13}{15}-\frac{7}{24}+\frac{11}{20}\right)\times\frac{8}{9}.$ — R. 1.
4. $\left(\frac{3}{4}-\frac{7}{20}+\frac{2}{5}\right):\frac{2}{3}.$ — R. $1\frac{1}{5}.$
5. $\frac{6}{7}\times\frac{7}{8}+\frac{1}{4}:\frac{3}{5}.$ — R. $1\frac{1}{6}.$
6. $1\frac{2}{7}\times 1\frac{17}{18}+\frac{1}{2}:\frac{1}{3}.$ — R. 4.
7. $\left(\frac{5}{6}+\frac{7}{18}-\frac{4}{9}\right):7.$ — R. $\frac{1}{9}.$
8. $\left(2\frac{3}{4}-1\frac{2}{5}\right):\left(3\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right).$ — R. $\frac{27}{74}.$
9. $\left(\frac{3}{20}+\frac{8}{105}\right):\left(\frac{5}{24}+\frac{1}{56}\right).$ — R. 1.
10. $\left(\frac{4}{9}+2\frac{3}{4}+5\right)-\left(3\frac{1}{3}+1\frac{5}{36}\right)$ — R. $3\frac{13}{18}.$
11. $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\right):\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{1}{6}\right).$ — R. $\frac{5}{19}.$
12. $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}\right)\ \left(\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}\right).$ — R. $\frac{1}{8}.$
13. $\frac{7}{9}\times\frac{18}{21}+\frac{5}{7}\times\frac{14}{15}-\frac{1}{3}.$ — R. 1.
14. $\frac{4}{5}\times\frac{15}{16}+\frac{16}{19}\times\frac{57}{64}+\frac{3}{4}.$ — R. $2\frac{1}{4}.$
15. $\frac{3}{5}\times\left(\frac{7}{8}+\frac{5}{6}\right)+\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right).$ — R. $1\frac{103}{120}.$
16. $\left(7\frac{1}{6}-5\frac{3}{8}\right):\frac{7}{24}-\left(3\frac{5}{9}:10\frac{2}{3}\right).$ — R. $5\frac{17}{21}.$
17. $\frac{2\frac{2}{3}}{5}\times\frac{3\frac{1}{2}}{4}.$ — R. $\frac{7}{15}.$
18. $\frac{3+\frac{1}{2}}{2-\frac{1}{4}}-\frac{\frac{5}{6}}{\frac{7}{9}}.$ — R. $\frac{13}{14}.$

19. $\dfrac{1\frac{2}{3}+3\frac{1}{4}\times 5}{5\frac{1}{6}-3\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}$. R. $4\frac{23}{48}$.

20. $\dfrac{\frac{5}{21}-\frac{1}{15}+\frac{29}{35}}{\frac{11}{12}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}}$. R. 2.

21. $\dfrac{\frac{3}{4}-\frac{7}{20}+\frac{1}{15}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{15}}$. R. 1.

22. $\dfrac{\frac{1}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{5}{6}}{\frac{2}{3}\times\frac{7}{8}\times\frac{1}{7}}$. R. $2\frac{2}{3}$.

23. $\dfrac{\frac{7}{32}\times 4}{\frac{7}{8}\times 3}+\dfrac{\frac{3}{4}\times 8}{\frac{3}{5}\times 2}$. R. $5\frac{1}{3}$.

24. $\dfrac{4\frac{8}{9}\times 3\frac{3}{5}}{5\frac{5}{7}\times 1\frac{1}{6}}-\dfrac{1\frac{2}{3}\times 2\frac{1}{4}}{4\frac{4}{7}\times 4\frac{3}{8}}$. R. $2\frac{181}{400}$.

25. $\dfrac{1\frac{5}{7}\times 2\frac{1}{3}}{2\frac{1}{2}+4\frac{1}{6}}\times\dfrac{3\frac{3}{8}+4\frac{1}{2}}{1\frac{3}{4}\times 3\frac{1}{3}}$. R. $\frac{81}{100}$.

CAPÍTULO XIV

PROBLEMAS SÔBRE FRAÇÕES

220. **Resolução de problemas.** — A seguir cuidaremos da resolução de alguns problemas envolvendo as operações fundamentais sôbre frações ordinárias estudadas nos capítulos anteriores.

1.º *Qual o número cujos $\frac{3}{4}$ aumentados de 15 valem 150?*

Resolução:

Efetuando a subtração

$$150 - 15 = 135,$$

teremos, conforme o enunciado,

$\frac{3}{4}$ do número procurado valem 135

$\frac{1}{4}$ vale .... $135 : 3 = 45$

$\frac{4}{4}$ valerão .... $4 \times 45 = 180$.

2.º *Em uma chácara, $\frac{3}{5}$ da produção de milho é reservada para a alimentação dos animais e $\frac{1}{4}$ do restante é vendida. Qual a parte ainda disponível?*

Resolução:

Quantidade produzida 1

Quantidade reservada .... $\frac{3}{5}$.

Restante .... $1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$.

Parte vendida .... $\frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$.

Parte disponível .... $\frac{2}{5} - \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$.

3.º *Distribuiu-se certa quantia entre três pessoas do modo seguinte: deu-se $\frac{1}{3}$ à primeira, $\frac{1}{4}$ à segunda e 500 cruzeiros à terceira. Qual foi a quantia distribuída?*

Resolução:

A primeira e a segunda recebem juntas

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}.$$

Assim, restam para a terceira

$$1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}.$$

Temos, então,

$\frac{5}{12}$ da quantia procurada valem .. Cr\$ 500,00,

$\frac{1}{12}$ vale .... Cr\$ 500,00 : 5 = Cr\$ 100,00,

$\frac{12}{12}$ valerão .... Cr\$ 100,00 × 12 = Cr\$ 1 200,00.

4.º *Um terreno no valor de 240 000 cruzeiros é dividido em lotes. O primeiro é avaliado em $\frac{2}{5}$ do valor total do terreno, o segundo em $\frac{2}{3}$ do valor do primeiro e o terceiro em $\frac{3}{4}$ do valor do segundo. Quanto vale o quarto lote?*

Resolução:

Valor do 1.º lote .... Cr\$ 240 000,00 × $\frac{2}{5}$ = Cr\$ 96 000,00,

Valor do 2.º lote .... Cr\$ 96 000,00 × $\frac{2}{3}$ = Cr\$ 64 000,00,

Valor do 3.º lote .... Cr\$ 64 000,00 × $\frac{3}{4}$ = Cr\$ 48 000,00,

Valor dos três lotes juntos .... Cr\$ 208 000,00.

Assim, o valor do quarto lote será

Cr\$ 240 000,00 – Cr\$ 208 000,00 = Cr\$ 32 000,00.

5.º *Uma torneira enche um tanque em 6 horas e outra em 8 horas. Estando ambas abertas, em quanto tempo ficará cheio o tanque?*

Resolução:

A primeira em 1 hora encherá .... $\frac{1}{6}$,

A segunda em 1 hora encherá .... $\frac{1}{8}$,

As duas juntas, em 1 hora, encherão: $\frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{7}{24}$.

Assim, a água fornecida pelas duas torneiras juntas atingirá

$\frac{7}{24}$ do tanque em .... 1 h.

$\frac{1}{24}$ do tanque em .... $\frac{1}{7}$ h.

$\frac{24}{24}$ do tanque em $\frac{1}{7} \times 24 = \frac{24}{7} = 3\frac{3}{7}$ h.

221. Exercícios propostos.

1. Três quartas partes de certo terreno foram vendidas por 60 000 cruzeiros. Qual é o valor dêsse terreno? R. Cr\$ 80 000,00.

2. Procurar o número cujos $\frac{2}{3}$ valem 92. R. 138.

3. Qual é o número cujos $\frac{5}{7}$ valem 105? R. 147.

4. Por quanto se deve multiplicar um número para aumentá-lo de seus $\frac{5}{6}$? R. $\frac{11}{6}$.

5. Por quanto se deve multiplicar um número para diminuí-lo de seus $\frac{4}{7}$? R. $\frac{3}{7}$.

6. Achar uma fração igual a $\frac{117}{312}$ tendo 96 como denominador. R. $\frac{36}{96}$.

7. Achar uma fração igual a $\frac{125}{200}$ tendo 65 como numerador. R. $\frac{65}{104}$.

8. Achar uma fração igual a $\frac{25}{40}$ cujos têrmos tenham como m. d. c. o número 7. R. $\frac{35}{56}$.

9. Procurar um número sabendo-se que os seus três quartos aumentados de 18 valem 198. R. 240.

10. Em uma propriedade rural $\frac{3}{4}$ do terreno acha-se cultivado, $\frac{1}{12}$ coberto de matas e o restante é de campo. Qual a parte do campo? R. $\frac{1}{6}$.

11. Três pessoas formaram uma sociedade comercial, entrando a primeira com $\frac{2}{5}$ do capital, e a segunda com $\frac{1}{3}$. Com quanto entrou a terceira? R. $\frac{4}{15}$.

12. Um operário recebeu 1 224 cruzeiros por 25 dias e meio de trabalho. Quanto ganha por dia? R. Cr\$ 48,00.

13. Seis metros de certo tecido custam 120 cruzeiros. Qual é o valor de três quartos de metro dêsse tecido? R. Cr\$ 15,00.

14. Se $3\frac{1}{2}$ quilogramas de açúcar custam Cr\$ 14,00, qual é o valor de $5\frac{3}{4}$ quilogramas? R. Cr\$ 23,00.

15. Um automóvel percorre 120 quilômetros em 2 horas. Em uma hora e três quartos quanto percorreu? R. 105.

16. Um avião percorre 980 quilômetros em três horas e meia. Em 2 horas quantos quilômetros percorrerá? R. 560.

17. Um navio percorre $15\frac{4}{5}$ milhas por hora. Em 6 horas e meia de marcha quantas milhas percorrerá? R. $102\frac{7}{10}$.

18. Uma pessoa gastou $\frac{5}{8}$ do que possuia e ainda ficou com 120 cruzeiros. Quanto possuia? R. Cr\$ 320,00.

19. Um operário demora 7 dias e meio para executar $\frac{4}{5}$ de certo serviço. Em quanto tempo poderá executar o serviço todo? R. $9\frac{3}{8}$ d.

20. Sabendo-se que o som percorre 340 metros por segundo, calcular a profundidade de um despenhadeiro no qual se deixou cair uma pedra cujo ruído foi percebido $2\frac{1}{2}$ segundos depois de produzido. R. 850 m.

21. Uma torneira pode encher um tanque em 6 horas e outra esvaziá-lo em 9 horas. Estando o tanque vazio e abrindo-se as duas torneiras, em que tempo ficará cheio? R. 18 h.

22. Uma torneira pode encher um tanque em 9 horas, outra em 12 horas e uma terceira em 15 horas. Correndo juntas, que fração do tanque encherão em uma hora? R. $\frac{47}{180}$.

23. Um operário pode executar certo serviço em 3 dias, outro em 4 dias e um terceiro em $5\frac{1}{2}$ dias. Trabalhando juntos, que parte do serviço poderão executar em um dia? R. $\frac{101}{132}$.

24. Quatro pessoas repartem certa quantia do modo seguinte: a primeira recebe a metade, a segunda a metade da parte da primeira e a terceira a metade da parte da segunda. Quanto resta para a quarta? R. $\frac{1}{8}$.

25. Três pessoas repartem certa quantia do modo seguinte: a primeira recebe 320 cruzeiros, a segunda uma parte igual aos $\frac{3}{8}$ da primeira e a terceira uma parte igual aos $\frac{5}{6}$ da parte da segunda. Qual foi a quantia distribuída? R. Cr\$ 540,00.

26. Distribuiu-se certa quantia entre três pessoas do modo seguinte: $\frac{4}{7}$ à primeira, $\frac{3}{10}$ à segunda e 180 cruzeiros à terceira. Qual foi a quantia distribuída? R. Cr\$ 1 400,00.

27. Repartiram-se 1 800 cruzeiros entre três pessoas. A segunda recebeu parte igual aos $\frac{2}{3}$ da primeira e a terceira recebeu parte igual aos $\frac{5}{6}$ da segunda. Quanto recebeu a primeira? R. Cr$ 810 00.

28. Qual a quantidade de manteiga que se pode produzir com 600 litros de leite, se o leite contém $\frac{3}{20}$ do seu volume em gordura e a gordura $\frac{8}{25}$ do seu volume em manteiga? R. $28\frac{4}{5}$ l.

29. Uma pessoa depois de gastar $\frac{1}{4}$ do seu dinheiro, $\frac{1}{3}$ do que lhe restou e $\frac{1}{5}$ do que então possuia ficou com 360,00 cruzeiros. Quanto possuia inicialmente? R. Cr$ 900,00.

30. Um terreno no valor de 360 000 cruzeiros foi dividido em quatro lotes. O primeiro é avaliado em $\frac{3}{5}$ do valor total do terreno, o segundo em $\frac{2}{9}$ do valor do primeiro e o terceiro em $\frac{5}{12}$ do valor do segundo. Quanto vale o quarto lote? R Cr$ 76 000,00.

31. A soma de dois números é 52 e o menor é igual aos cinco oitavos do maior. Quais são os números? R. 32 e 20.

32. A diferença de dois números é 36 e o menor é igual aos quatro quintos do maior. Quais são os números? R. 180 e 144.

33. A soma dos três quartos com os quatro quintos de um número é 93. Qual é o número? R. 60.

34. Qual é o número que, dividido por três quintos, aumenta de 20 unidades? R. 30.

35. Se dos três quartos de um número subtrairmos 3 unidades, obteremos o quociente da divisão do mesmo número por oito quintos. Qual é o número? R. 24.

36. Achar uma fração igual a $\frac{3}{4}$ e que a soma dos têrmos seja 35. R. $\frac{15}{20}$.

CAPÍTULO XV

FRAÇÕES DECIMAIS: NOÇÃO DE FRAÇÃO E DE NÚMERO DECIMAL. OPERAÇÕES FUNDAMENTAIS

222. **Fração decimal.** — *Fração decimal é tôda fração que tem como denominador uma potência de dez.*

Assim,

$$\frac{3}{10}, \quad \frac{15}{100}, \quad \frac{237}{1\,000}$$

são frações decimais.

223. **Número decimal.** — Consideremos a fração decimal

$$\frac{539}{100}.$$

Transformando-a em número misto, temos

$$\frac{539}{100} = 5 + \frac{39}{100}.$$

Decompondo a fração que acompanha o inteiro, vem

$$\frac{539}{100} = 5 + \frac{39}{100} = 5 + \frac{30}{100} + \frac{9}{100},$$

ou, simplificando,

$$\frac{539}{100} = 5 + \frac{3}{10} + \frac{9}{100}.$$

A fração dada ficou, dêsse modo, decomposta em uma parte inteira e várias *partes decimais* da unidade, a saber, 5 inteiros, 3 décimos e 9 centésimos.

Essas partes são designadas por unidades decimais de *primeira ordem*, de *segunda ordem*, de *terceira ordem*, etc.

Por outro lado, tendo em vista que

$$1 = \frac{10}{10}, \quad \frac{1}{10} = \frac{10}{100}, \quad \frac{1}{100} = \frac{10}{1\,000}, \ldots$$

segue-se que, como os números inteiros, as frações decimais podem ser decompostos em unidades de diferentes ordens, as quais se sucedem segundo a mesma lei: *cada unidade de uma ordem vale dez unidades da ordem seguinte.*

Essa lei permite a representação das frações decimais de modo análogo a dos números inteiros, para o que basta se fixar o lugar que deve ser ocupado pelos algarismos das unidades simples na parte inteira e aplicar a convenção fundamental da numeração escrita.

Exemplo: seja a fração decimal

$$\frac{5\,378}{1\,000} = 5 + \frac{3}{10} + \frac{7}{100} + \frac{8}{1\,000}.$$

Se convencionarmos separar por uma *vírgula*, dentre os algarismos que representam as unidades decimais das diferentes ordens, o algarismo que representa as unidades simples da parte inteira e se escrevermos depois da vírgula, sucessivamente, os décimos, centésimos, milésimos, etc., vem

$$\frac{5\,378}{1\,000} = 5 + \frac{3}{10} + \frac{7}{100} + \frac{8}{1\,000} = 5{,}378.$$

Dêsse modo, a fração decimal

$$\frac{5\,378}{1\,000}$$

fica escrita sob a forma de *número decimal:*

$$5{,}378.$$

224. **Conversão da fração decimal em número decimal.** — De acôrdo com o exposto, *para transformar fração decimal em número decimal basta escrever o numerador e nêle separar, por vírgula, a partir do último algarismo à direita, tantos algarismos decimais quantos são os zeros do denominador.*

Exemplo:

$$\frac{63\,245}{10\,000} = 6{,}324\,5.$$

Quando o número de algarismos do numerador fôr inferior ao de zeros do denominador, para tornar possível a separação dos algarismos decimais do primeiro, poder-se-á escrever à sua esquerda o número de zeros que para isso fôr necessário. — Exemplo:

$$\frac{23}{10\,000} = \frac{00\,023}{10\,000} = 0{,}002\,3.$$

225. **Conversão de número decimal em fração decimal.** — Consideremos o número decimal

$$25{,}312.$$

Para convertê-lo em fração decimal bastará escrever o número decimal como numerador da fração e sem a vírgula e para denominador tomar um número formado pela unidade seguida de tantos zeros quantos são os algarismos decimais do número dado. — Teremos, assim,

$$25{,}312 = \frac{25\,312}{1\,000}.$$

226. **Modo de ler um número decimal.** — Lê-se a parte inteira, acompanhada da designação de unidades, e depois a decimal com a menção da unidade representada pelo último algarismo à direita. — Assim, o número decimal

$$5{,}063$$

é lido: *cinco unidades e sessenta e três milésimos.*

Do mesmo modo, o número decimal

$$0{,}000\,9$$

é lido: *nove décimos milésimos,* uma vez que, sendo nula a parte inteira, não há necessidade de mencioná-la.

227. **Modo de escrever um número decimal.** — Escreve-se a parte inteira seguida de uma vírgula e depois a decimal, com o cuidado de colocar cada algarismo no lugar das unidades que representa.

Assim, o número decimal *sete unidades, duzentos e treze milésimos* é escrito

$$7{,}213.$$

Do mesmo modo, o número *dezoito centésimos milésimos* é escrito

$$0{,}000\ 18.$$

228. **Propriedades dos números decimais.** — 1.ª *O valor de um número decimal não se altera quando se colocam ou suprimem zeros à sua direita.* — Assim, dizemos que

$$2{,}39 = 2{,}390\ 0.$$

Com efeito, contendo os números acima o mesmo número de unidades simples, de décimos e de centésimos, são iguais. — Pelo mesmo motivo, teremos

$$12{,}500\ 0 = 12{,}5.$$

2.ª *Para multiplicar um número decimal por 10, 100, 1 000,... basta deslocar-lhe a vírgula 1, 2, 3... casas para a direita.* — Assim dizemos que

$$3{,}625 \times 100 = 362{,}5.$$

Com efeito, transformando o número decimal em fração teremos

$$3{,}625 \times 100 = \frac{3\ 625}{1\ 000} \times 100 = \frac{3\ 625 \times 100}{1\ 000} = 362{,}5.$$

Quando o número de algarismos da parte decimal fôr inferior ao de zeros do multiplicador, escreve-se à direita do número decimal o número de zeros suficiente para se completar o deslocamento da vírgula. Exemplo:

$$3{,}5 \times 1\ 000 = 3{,}500 \times 1\ 000 = 3\ 500.$$

3.ª. *Para dividir um número decimal por 10, 100, 1 000... basta deslocar-lhe a vírgula 1, 2, 3... casas para a esquerda.* — Assim dizemos que

$$235{,}7 : 100 = 2{,}357.$$

Com efeito, tendo em vista que

$$2{,}357 \times 100 = 235{,}7$$

segue-se que 2,357 é o quociente de 235,7 por 100.

OPERAÇÕES

229. **Adição.** — Consideremos a soma indicada

$$2{,}407 + 3{,}25 + 32{,}9.$$

Convertendo êsses números em frações, temos

$$2{,}407 = \frac{2\ 407}{1\ 000}, \quad 3{,}25 = \frac{325}{100}, \quad 32{,}9 = \frac{329}{10}.$$

Somando essas frações, encontramos

$$\frac{2\ 407}{1\ 000} + \frac{325}{100} + \frac{329}{10} = \frac{2\ 407}{1\ 000} + \frac{3\ 250}{1\ 000} + \frac{23\ 900}{1\ 000} = \frac{38\ 557}{1\ 000}.$$

Transformando a soma obtida em número decimal, vem

$$\frac{38\ 557}{1\ 000} = 38{,}557.$$

Chega-se, dêsse modo, a que

$$2{,}407 + 3{,}25 + 32{,}9 = 38{,}557.$$

Assim, para obter a soma de dois ou mais números decimais, basta escrevê-los todos com o mesmo número de algarismos decimais; somar os números inteiros obtidos depois da supressão das vírgulas e separar na soma, da direita para a esquerda, tantos algarismos decimais quantos são os do número que mais os contenha.

$$\boxed{\begin{array}{r} 2{,}407 \\ 3{,}250 \\ 32{,}900 \\ \hline 38{,}557 \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{r} 2{,}407 \\ 3{,}25 \\ 32{,}9 \\ \hline 38{,}557 \end{array}}$$

Para facilitar a operação, pode-se adotar o dispositivo indicado à esquerda, estabelecendo-se a correspondência em coluna das unidades de mesma ordem de cada uma das parcelas. Pode-se, ainda, deixar de escrever os zeros necessários para igualar as casas decimais das parcelas, desde que se tenha o cuidado de dispô-las como se nelas figurassem os zeros, conforme o quadro à direita.

230. **Regra.** — *Para somar números decimais escrevemo-los uns sob os outros de modo que as vírgulas se correspondam verticalmente; efetua-se a soma como se fôssem números inteiros e*

coloca-se no resultado uma vírgula em coluna com as das parcelas. — Exemplo:

$$\begin{array}{r} 7{,}512 \\ 0{,}48 \\ 9{,}483\,5 \\ \hline 17{,}475\,5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3{,}27 \\ 0{,}0029 \\ 0{,}824 \\ \hline 4{,}096\,9 \end{array}$$

231. Exercícios.

Efetuar as operações seguintes:

1. 5,953 + 7,285. — R. 13,238.
2. 3,029 + 9,453. — R. 12,482.
3. 6,87 + 8,453 + 5,4. — R. 20,723.
4. 7,295 + 8,63 + 3,008. — R. 18,933.
5. 5,421 + 3,984 + 7,53. — R. 16,935.
6. 12,5 + 1,738 + 2,53 + 4. — R. 20,768.
7. 4,523 + 10,07 + 1,289 5 + 3,5. — R. 19,382 5.
8. 12,07 + 5,729 + 6,813 4 + 18,4. — R. 43,012 4.
9. 6,58 + 10,5 + 7,951 + 0,019 8 + 5. — R. 30,050 8.
10. 12 + 6,5 + 7,23 + 9,581 + 10,437 8. — R. 45,748 8.

232. Subtração. — Consideremos a diferença

$$5{,}8 - 3{,}157.$$

Convertendo êsses números em frações, temos

$$5{,}8 = \frac{58}{10}, \quad 3{,}157 = \frac{3\,157}{1\,000}.$$

Subtraindo essas frações, encontramos

$$\frac{58}{10} - \frac{3\,157}{1\,000} = \frac{5\,800}{1\,000} - \frac{3\,157}{1\,000} = \frac{2\,643}{1\,000}.$$

Convertendo o resultado obtido em número decimal, vem

$$\frac{2\,643}{1\,000} = 2{,}643.$$

Chega-se dêsse modo a que

$$5{,}8 - 3{,}157 = 2{,}643.$$

Na prática, pode-se adotar um dos dispositivos indicados a seguir, escrevendo-se os números dados de modo que as unidades da mesma ordem fiquem colocadas em coluna e operando-se do modo seguinte: subtraem-se os números decimais dados como se fôssem inteiros e coloca-se no resultado uma vírgula em coluna com as demais. Pode-se, ainda, deixar de escrever os zeros necessários para igualar o número de algarismos decimais dos têrmos da subtração, desde que se tenha o cuidado de dispô-los como se nêles figurassem os zeros.

$$\boxed{\begin{array}{r} 5{,}800 \\ 3{,}157 \\ \hline 2{,}643 \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{r} 5{,}8 \\ 3{,}157 \\ \hline 2{,}643 \end{array}}$$

233. Regra. — *Para subtrair números decimais escreve-se o subtraendo sob o minuendo de modo que as vírgulas se correspondam verticalmente; efetua-se a subtração como se fôssem números inteiros e coloca-se no resultado uma vírgula em coluna com as dos números dados.* — Exemplos:

$$\begin{array}{r} 12{,}328 \\ 5{,}783 \\ \hline 6{,}545 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1{,}5 \\ 0{,}000\,72 \\ \hline 1{,}499\,28 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 10{,} \\ 7{,}325 \\ \hline 2{,}675. \end{array}$$

234. Exercícios.

Efetuar as operações seguintes:

1. 2,85 − 1,327. — R. 1,523.
2. 5,312 − 3,027. — R. 2,285.
3. 12,54 − 10 185. — R. 2,355.
4. 14,38 − 12,003 75. — R. 2,376 25.
5. 6 − 1,372 43. — R. 4,627 57.
6. 8,9 − 5,918 062 5. — R. 2,981 937 5.
7. 7,253 − 4,163 245. — R. 3,089 755.
8. 5,953 4 − 3,853 228. — R. 2,100 172.
9. 0,832 1 − 0,507 632. — R. 0,324 468.
10. 0,975 43 − 0,062 965 3. — R. 0,912 464 7.

235. Multiplicação. — Consideremos o produto indicado

$$3{,}27 \times 4{,}8.$$

Convertendo os fatôres em frações decimais e efetuando depois a multiplicação, encontramos

$$3{,}27 \times 4{,}8 = \frac{327}{100} \times \frac{48}{10} = \frac{15\,696}{1\,000} = 15{,}696.$$

Verificamos, dêsse modo, que o resultado obtido é um número decimal formado pelo produto dos números dados, como também que o número de algarismos decimais do produto é igual à soma dos números de algarismos decimais dos fatôres.

$$\begin{array}{r} 3{,}27 \\ 4{,}8 \\ \hline 2616 \\ 1308 \\ \hline 15{,}696 \end{array}$$

Na prática, dispõe-se a operação do modo indicado ao lado, efetuando-se a multiplicação como se os números dados fôssem inteiros e separando-se no produto tantos algarismos decimais quantos contêm os dois fatôres.

236. **Regra.** — *Para multiplicar números decimais procede-se como se êles fôssem números inteiros e depois separa-se à direita do produto tantos algarismos decimais quantos contêm, ao todo, os dois fatôres.* — Exemplos:

$$\begin{array}{r} 0{,}597 \\ 5{,}24 \\ \hline 2388 \\ 1194 \\ 2\,985 \\ \hline 3{,}12828 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0{,}0468 \\ 243 \\ \hline 1404 \\ 1\,872 \\ 9\,36 \\ \hline 11{,}3724 \end{array}$$

237. **Exercícios.**

Efetuar as operações seguintes:

1.	3,25 × 8,4.	R. 27,3.
2.	4,36 × 2,54.	R. 11,074 4.
3.	0,189 × 3,72.	R. 0,703 08.
4.	15,08 × 1,035.	R. 15,607 8.
5.	3,8 × 0,25 × 1,47.	R. 1,396 5.
6.	4,25 × 7,5 × 0,54.	R. 17,212 5.
7.	0,85 × 3,42 × 1,38.	R. 4,011 66.
8.	0,003 2 × 0,006 13 × 15.	R. 0,000 294 24.
9.	2,726 × 4,35 × 12,006.	R. 142,368 348 6.
10.	6,495 × 2,327 × 7,84.	R. 118,492 701 6.

238. **Divisão.** — Consideremos o quociente indicado

$$18{,}4 : 0{,}35.$$

Convertendo êsses números em frações, vem

$$18{,}4 : 0{,}35 = \frac{184}{10} : \frac{35}{100}.$$

Efetuando a divisão das frações obtidas, temos

$$\frac{184}{10} : \frac{35}{100} = \frac{18\,400}{350} = \frac{1\,840}{35}.$$

Encontramos, dêsse modo,

$$18{,}4 : 0{,}35 = \frac{1\,840}{35}.$$

Assim, o quociente de números decimais apresenta-se sob a forma de fração ordinária, a qual indica o quociente dos números inteiros que se obtêm suprimindo as vírgulas dos números decimais dados, depois de reduzidos ao mesmo número de algarismos decimais.

A fim de obter em forma decimal o quociente devemos procurar uma fração decimal cujo valor seja igual ou *aproximado* da fração ordinária considerada.

Deixando para o capítulo seguinte o caso geral da conversão de frações ordinárias em números decimais, cuidemos agora da prática da divisão de números decimais.

Distinguiremos dois casos: 1.º) *o divisor é número inteiro;* 2.º) *o divisor é número decimal.*

239. **1.º Caso.** — Seja efetuar a divisão

$$1{,}68 : 12,$$

na qual o divisor é número inteiro.

Notando que a divisão de 1 por 12 não é possível, tomamos 16 *décimos* como primeiro dividendo parcial, procurando o quociente

16 : 12 (décimos).

$$\begin{array}{l|l} 1{,}68 & 12 \\ \cline{2-2} 0{,}48 & 0{,}14 \\ 0 & \end{array}$$

Efetuando a divisão, encontramos o quociente 1 décimo e o resto 4 décimos. Escrevemos, então, o primeiro precedido de zero e vírgula e à direita do segundo colocamos o algarismo seguinte do dividendo.

Efetuamos depois a divisão

$$48 : 12 \quad \text{(centésimos)}.$$

Sendo o resto dessa divisão igual a zero, temos

$$1{,}68 : 12 = 0{,}14.$$

Na prática, dispõe-se a operação como se vê no quadro acima.

Assim, *para dividir um número decimal por um inteiro, efetua-se a operação como se o dividendo fôsse inteiro, tendo-se o cuidado de colocar a vírgula no quociente ao considerar o algarismo dos décimos do dividendo.*

240. **2.º Caso.** — Seja efetuar a divisão

$$4{,}212 : 2{,}34,$$

na qual o divisor é número decimal.

Multiplicando o dividendo e o divisor por 100, com o que o quociente não se altera, consideremos a divisão

$$421{,}2 : 234,$$

na qual o divisor é inteiro. Recaímos, dêsse modo, no caso anterior.

Efetuando a divisão, encontramos o quociente 1,8 e o resto zero.

$$\begin{array}{r|l} 421{,}2 & 234 \\ \cline{2-2} 187\,2 & 1{,}8 \\ 0 & \end{array}$$

Temos, portanto,

$$4{,}212 : 2{,}34 = 1{,}8.$$

Assim, *para dividir um número decimal por outro decimal, multiplicam-se ambos pela potência de dez necessária para tornar o divisor inteiro e efetua-se a operação segundo a regra do caso anterior.*

241. **Noção de quociente aproximado.** — Consideremos a divisão

$$13 : 3.$$

Evidentemente, o quociente procurado está compreendido entre os números 4 e 5, uma vez que

$$3 \times 4 = 12,$$

$$3 \times 5 = 15.$$

Por outro lado, tendo em vista

$$5 - 4 = 1,$$

dizemos que o quociente de 13 por 3 difere de 5 ou de 4 de *menos de uma unidade,* ou que, se substituirmos o quociente procurado por 5 ou por 4, o êrro que cometeremos será *menor que uma unidade.*

Isto pôsto, dizemos que 4 e 5 são quocientes aproximados de 13 por 3.

Procuremos maiores aproximações na pesquisa do quociente de 13 por 3.

Transformando o número inteiro 13 em décimos, teremos 130 décimos. Dividindo 130 décimos por 3, encontraremos 43.

Mas como o quociente é da espécie do dividendo, segue-se que

$$4{,}3$$

é o quociente aproximado por falta de 13 por 3, *a menos de* 0,1.

Do mesmo modo, transformando 13 inteiros em centésimos, milésimos, etc., e efetuando as divisões por 3, chegaríamos a que

$$4{,}33$$

é o quociente aproximado por falta de 13 por 3, *a menos de* 0,01 e que

$$4{,}333$$

é o quociente aproximado por falta de 13 por 3, *a menos de* 0,001, etc.

Estendendo êsse conceito aos números fracionários, podemos enunciar a definição que segue.

Quociente aproximado de dois números inteiros ou fracionários a menos de 0,1, 0,01, 0,001, etc. por falta é o maior número de décimos, centésimos, milésimos, etc., cujo produto pelo divisor possa ser subtraído do dividendo.

242. **Regra.** — A fim de facilitar a pesquisa dos quocientes aproximados de dois números decimais, na prática costuma-se proceder do modo seguinte:

Depois de se terem multiplicado os números decimais propostos pela potência de dez necessária para tornar o divisor inteiro, efetua-se a divisão como se fôsse para procurar o quociente com a aproximação de uma unidade; depois de considerar todos os algarismos da parte inteira do dividendo, coloca-se *vírgula no quociente; prossegue-se na divisão, tomando os algarismos sucessivos da parte decimal do dividendo, completados com zeros se fôr preciso, até obter-se o quociente com a aproximação desejada.* — Exemplo:

1.º Achar o quociente de 2 357,48 por 14,3 com aproximação de 0,01.

```
23574,8 | 143
 927      164,85
  694
  1228
   840
   125
```

Resultado: 164,85.

2.º Calcular o quociente de 1,5 por 0,0029 com aproximação de 0,001.

```
15000   | 00029
 50       517,241
 210
   70
  120
    40
    11
```

Resultado: 517,241.

243. Exercícios.

Calcular, com aproximação de 0,01, os quocientes dos números seguintes:

1. De 31	por 9.	R. 3,44.
2. De 7	por 13,	R. 0,53.
3. De 5	por 3,7.	R. 1,35.
4. De 8,1	por 19.	R. 0,42.
5. De 6,31	por 0,7.	R. 9,01.

Achar com aproximação de 0,001, os quocientes dos números seguintes:

6. De 1,09	por 6.	R. 0,181.
7. De 12,5	por 0,33.	R. 37,878.
8. De 0,07	por 1,45.	R. 0,048.
9. De 2,005	por 3,02.	R. 0,663.
10. De 0,012 8	por 0,019 3.	R. 0,663.

CAPÍTULO XVI

CONVERSÃO DE FRAÇÕES ORDINÁRIAS EM DECIMAIS E VICE-VERSA

244. Conversão de frações ordinárias em decimais. — Procuremos o quociente aproximado da divisão

$$27 : 16,$$

aplicando a regra conhecida.

```
27   | 16
110    1,6875
 140
  120
   80
    0
```

Tendo chegado a um resto nulo na última divisão parcial efetuada, verificamos que o quociente obtido é exato.

Nestas condições, podemos escrever

$$27 : 16 = 1,6875.$$

Por outro lado, notando que

$$27 : 16 = \frac{27}{16},$$

segue-se que

$$\frac{27}{16} = 1,6875.$$

Dizemos, então, que a fração ordinária considerada *pode ser convertida em decimal.*

```
11  | 3
20    3,666...
 20
  20
   2
   .
   .
```

Servindo-nos da mesma regra, procuremos agora o quociente aproximado da divisão

$$11 : 3.$$

Sendo sempre o mesmo o resto obtido nas divisões parciais, segue-se que a operação pode ser prolongada indefinidamente, reproduzindo-se sempre o mesmo algarismo (6) no quociente.

Êsse fato leva-nos a admitir que não exista fração decimal igual à fração ordinária $\frac{11}{3}$, embora os quocientes sucessivos que se podem obter de 11 por 3 se aproximem cada vez mais de $\frac{11}{3}$.

Examinemos, agora, a condição que deve satisfazer uma fração ordinária para ser conversível em decimal exata.

Dada uma fração irredutível, como

$$\frac{7}{20}$$

por exemplo, para se obterem frações iguais devem-se multiplicar os seus têrmos por um mesmo número. Forma-se, assim, a série de frações iguais

$$\frac{7}{20}=\frac{14}{40}=\frac{21}{60}=\frac{28}{80}=\frac{35}{100}=\ldots$$

A fração

$$\frac{35}{100}=0{,}35$$

representa o resultado da conversão da fração proposta em decimal.

O denominador de uma fração decimal é sempre potência de dez; por isso mesmo, deve ser um produto dos fatôres 2 e 5 elevados ao mesmo expoente. — Então, é necessário multiplicar os têrmos da fração que se pretende converter em decimal por uma potência de 2 ou de 5 suficiente para que se tornem iguais os expoentes dêsses fatôres no denominador.

Com efeito, a fração

$$\frac{7}{20},$$

cujo denominador apresenta a seguinte decomposição.

$$20=2^2\times 5,$$

teve os seus têrmos multiplicados por 5.

A fração obtida,

$$\frac{35}{100},$$

apresenta o denominador formado pelo produto,

$$100=2^2\times 5^2,$$

dos fatôres primos 2 e 5 elevados ao mesmo expoente.

Mas, se o denominador de uma fração irredutível apresentar qualquer fator primo diferente de 2 e de 5, não pode haver fator algum que, multiplicando os têrmos da fração, torne o denominador igual a uma potência de 10. — Portanto:

Se uma fração irredutível contiver em seu denominador algum fator primo diferente de 2 e de 5, essa fração não pode ser convertida em decimal exata.

245. **Observação.** — O número de algarismos decimais de uma fração conversível exatamente em decimal é dado pelo maior expoente que tiver um dos fatôres, 2 ou 5, no denominador dessa fração.

Exemplo: achar o número de algarismos decimais que apresentará a fração

$$\frac{9}{80}$$

convertida em número decimal.

Decompondo 80 em fatôres primos, encontramos

$$80=2^4\times 5.$$

Sendo 4 o maior expoente do fator 2 no denominador, segue-se que o número decimal correspondente à fração dada terá 4 algarismos.

Com efeito:

$$\frac{9}{80}=0{,}112\,5.$$

246. **Indicação prática.** — Na prática, faz-se a conversão de uma fração ordinária em decimal, efetuando a divisão do numerador pelo denominador e exprimindo o quociente em forma decimal. — Exemplos:

1.º *Converter em número decimal a fração ordinária*

$$\frac{5}{32}.$$

Adotando o dispositivo prático usual, encontramos

```
50    | 32
180     0,156 25
 200
  080
   160
     0
```

Obtém-se, assim,

$$\frac{5}{32} = 0{,}156\ 25.$$

2.º *Converter em número decimal a fração*

$$\frac{5}{6}.$$

Notando que a fração dada não é conversível em decimal exata, por isso que o seu denominador contém fator diferente de 2 e 5, devemos procurar valores aproximados dessa fração.

Efetuando a divisão, vem

```
50   | 6
 20    0,833 3...
  20
   20
    2
    .
    .
    .
```

Assim, os valores aproximados da fração dada são

0,8 (com aproximação de 0,1),
0,83 (com aproximação de 0,01),
0,833 (com aproximação de 0,001),
0,8333 (com aproximação de 0,0001).

247. **Números decimais periódicos.** — Consideremos, ainda, dois exemplos de conversão aproximada de frações ordinárias em decimais. — Sejam as frações

$$\frac{7}{9} \quad \text{e} \quad \frac{4}{11}.$$

Efetuando a divisão do numerador de cada uma pelo denominador respectivo, encontraremos

```
70 | 9               40 | 11
70   0,777...        70   0,363 636...
70                    40
 7                     70
 .                      40
 .                       70
 .                        4
                          .
                          .
                          .
```

Aos resultados obtidos

0,777... e 0,363 636...

damos a denominação de números decimais periódicos ou dízimas periódicas.

Números decimais periódicos são números decimais cujos algarismos se sucedem indefinidamente, segundo uma lei determinada.

Denominamos, ainda, *período* ao algarismo ou grupo de algarismos que se repetem. — Assim, dadas as dízimas periódicas

0,777... e 0,363 636...

dizemos que os períodos são, respectivamente, 7 e 36.

Dízima periódica simples é aquela cujo período se inicia imediatamente após a vírgula. — Exemplo:

7,333... e 0,129 129 129...

Dízima periódica composta é aquela que apresenta, entre a vírgula e o primeiro período, uma parte não periódica. — Exemplo:

3,416 66... e 0,077 7...

248. **Caracteres de conversibilidade.** — Dada uma fração irredutível, pode-se prever a natureza do resultado da sua conversão em decimal, de acôrdo com os princípios enunciados a seguir.

1.º *Tôda fração irredutível cujo denominador contiver apenas os fatôres primos 2 ou 5 pode ser convertida em decimal exata.*

Exemplo: as frações

$$\frac{7}{8},\quad \frac{12}{25},\quad \frac{27}{40}$$

são conversíveis em decimal exata.

2.º *Tôda fração irredutível cujo denominador não contiver o fator 2 nem o fator 5, convertida em decimal, origina uma dízima periódica simples.*

Exemplo: as frações

$$\frac{4}{7},\quad \frac{5}{9},\quad \frac{8}{21},$$

convertidas em decimais, dão origem a dízimas periódicas simples.

3.º *Tôda fração irredutível cujo denominador contiver os fatôres 2 ou 5 com fatôres primos diferentes, convertida em decimal, origina uma dízima periódica composta.*

Exemplo: as frações

$$\frac{5}{6},\quad \frac{7}{12},\quad \frac{19}{30},$$

convertidas em decimais, dão origem a dízimas periódicas compostas.

249. **Frações geratrizes das dízimas periódicas.** — Consideremos a fração

$$\frac{2}{3}.$$

Convertendo-a em número decimal, encontramos

$$0{,}666\ldots$$

Dizemos, então que $\frac{2}{3}$ é a fração geratriz da dízima periódica 0,666...

250. **Geratriz de uma dízima periódica simples.** — Damos a seguir a regra aplicável ao cálculo da geratriz de uma dízima periódica simples.

Para obter a fração geratriz de uma dízima periódica simples forma-se uma fração que tenha para numerador o período e para denominador um número formado de tantos noves quantos são os algarismos do período.

1.º exemplo: a geratriz de

$$0{,}243\,243\,243\ldots \text{ é } \frac{243}{999} = \frac{9}{37}.$$

2.º exemplo: a geratriz de

$$0{,}006\,006\,006\ldots \text{ é } \frac{6}{999} = \frac{2}{333}.$$

3.º exemplo: seja achar a geratriz de

$$3{,}454\,545\ldots$$

Escrevamos

$$3{,}454\,545\ldots = 3 + 0{,}45\,45\,45\ldots$$

Como a geratriz de 0,454 545... é

$$\frac{45}{99} = \frac{5}{11},$$

segue-se que a geratriz de

$$3{,}454\,545\ldots \text{ é } 3 + \frac{5}{11} = \frac{38}{11}.$$

251. **Geratriz de uma dízima periódica composta.** — Damos a seguir a regra aplicável ao cálculo da geratriz de uma dízima periódica composta.

Para obter a fração geratriz de uma dízima periódica composta forma-se uma fração que tenha para numerador a parte não periódica, seguida de um dos períodos, menos a parte não periódica; e para denominador um número formado de tantos noves quantos são os algarismos do período, seguido de tantos zeros quantos são os algarismos da parte não periódica.

1.º exemplo: a geratriz de

$$0{,}725\,55\ldots \text{ é } \frac{725 - 72}{900} = \frac{653}{900}.$$

2.º exemplo: a geratriz de

$$0{,}007\,575\,75\ldots \text{ é } \frac{75}{9\,900} = \frac{1}{132}.$$

3.º exemplo: a geratriz de

$$3{,}637\,373\,7\ldots \text{ é } 3+\frac{637-6}{990}=3\,\frac{631}{990}.$$

252. Exercícios.

Calcular as frações geratrizes das dízimas periódicas seguintes:

1. De 0,777... R. $\frac{7}{9}$.
2. De 0,181 818... R. $\frac{2}{11}$.
3. De 0,323 232... R. $\frac{32}{99}$.
4. De 0,454 545 ... R. $\frac{5}{11}$.
5. De 0,123 123 123... R. $\frac{41}{333}$.
6. De 0,261 261 261... R. $\frac{29}{111}$.
7. De 0,245 724 57... R. $\frac{273}{1\,111}$.
8. De 0,060 606... R. $\frac{2}{33}$.
9. De 4 151 515... R. $4\frac{5}{33}$.
10. De 5,195 195 195... R. $5\frac{65}{333}$.
11. De 0,533 3... R. $\frac{8}{15}$.
12. De 0,833 3... R. $\frac{5}{6}$.
13. De 0,183 33... R. $\frac{11}{60}$.
14. De 0,346 66 ... R. $\frac{26}{75}$.

15. De 0,141 666... R. $\frac{17}{120}$.
16. De 0,003 636 36... R. $\frac{1}{275}$.
17. De 7,433 3... R. $7\frac{13}{30}$.
18. De 8,283 33... R. $8\frac{17}{60}$.
19. De 5,000 666... R. $5\frac{1}{1\,500}$.
20. De 5,789 393 93... R. $5\frac{521}{660}$.

CAPÍTULO XVII

SISTEMA LEGAL DE UNIDADES DE MEDIR

253. **Diferentes espécies de grandezas.** — Recordemos que grandezas são entes abstratos entre os quais se pode definir a igualdade e a soma (n.º 12).

Dentre as diferentes espécies de grandezas distinguem-se as *grandezas geométricas* e as *grandezas físicas*.

As grandezas geométricas são: *comprimento, área, volume, ângulo.*

As grandezas físicas são: o *tempo*, a *velocidade*, a *massa*, a *densidade*, etc.

254. **Medição direta e indireta.** — Há grandezas que podem ser medidas simplesmente pela aplicação direta da unidade escolhida. Outras, entretanto, não o podem ser por êsse meio.

Devemos então estabelecer a indispensável distinção entre os dois processos usados na medição das grandezas.

A *medição direta* consiste na aplicação sucessiva da unidade sôbre a grandeza. Assim é que se mede, por exemplo, o comprimento de um segmento de reta.

A *medição indireta* consiste em calcular o valor de uma grandeza mediante relações que a ligam a outras conhecidas, susceptíveis de avaliação direta. Medem-se dêsse modo as áreas das figuras planas, os volumes dos sólidos, etc.

255. **Grandezas elementares.** — Ao conjunto de unidades empregadas na medição das grandezas dá-se a denominação de *sistema de unidades de medir.*

Os sistemas de unidades de medir são instituídos do seguinte modo: escolhem-se certas grandezas, ditas *grandezas elementares*, das quais se derivam as demais a serem consideradas.

As grandezas elementares são: o *comprimento*, a *massa* e o *tempo*.

256. **Unidades fundamentais.** — As grandezas elementares devem ser referidas a certas unidades, denominadas *unidades fundamentais.*

Em o nosso país as unidades fundamentais legalmente adotadas são as seguintes: o *metro*, o *quilograma* e o *segundo*.

As duas primeiras são definidas arbitràriamente por meio de *padrões* e a terceira corresponde a uma fração do dia solar médio.

257. **Noção de grandeza composta.** — Como veremos mais adiante, para se obter a área de um retângulo basta multiplicar o comprimento da base pelo da altura. Assim, essa área é definida pelo *produto* de dois comprimentos.

Diremos então que a área da figura é *grandeza composta.*

Grandezas compostas são aquelas que se definem por meio de produtos ou quocientes de grandezas elementares ou de outras compostas.

257 A. **Sistema legal brasileiro.** — O sistema legal de unidades de medir atualmente em uso no Brasil foi instituído pelo Decreto Lei 4259 de 16 de junho de 1939.

Assim, tôdas as definições do presente capítulo, bem como a nomenclatura das unidades e a respectiva grafia foram tiradas do Regulamento aprovado pelo referido Decreto-Lei.

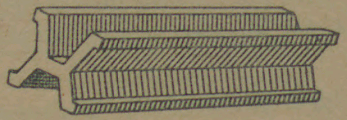
258. **Múltiplos e submúltiplos das unidades legais.** — Para designar os múltiplos e submúltiplos das unidades legais é bastante antepor ao nome da unidade os prefixos contidos no quadro seguinte:

Fator pelo qual é multiplicada a unidade	*Prefixo a antepor ao nome da unidade*	*Símbolo a antepor ao da unidade*
1 000 000	mega	M
100 000	hectoquilo	hk
10 000	míria	ma
1 000	quilo	k
100	hecto	h
10	deca	da
0,1	deci	d
0,01	centi	c
0,001	mili	m
0,000 1	decimili	dm
0,000 01	centimili	cm
0,000 001	micro	μ
0,000 000 1	decimicro	dμ
0,000 000 01	centimicro	cμ
0,000 000 001	milimicro	mμ
0,000 000 000 001	micromicro	μμ

259. Unidade legal de comprimento. — A unidade legal de comprimento é o *metro*, definido por meio do protótipo internacional, denominado metro padrão.

A definição legal do metro é a seguinte:

O metro é a distância, à temperatura de zero graus centígrados, dos eixos dos dois traços médios gravados sôbre a barra de platina iridiada depositada na Repartição Internacional de Pesos e Medidas e considerada como protótipo do metro.



A distância que define o metro foi considerada como protótipo do metro pela Primeira Conferência Geral de Pesos e Medidas, estando a barra submetida à pressão atmosférica normal e suportada por dois rolos com um diâmetro mínimo de um centímetro, situados simètricamente num mesmo plano horizontal e à distância de 571 milímetros um do outro.

260. Múltiplos e submúltiplos usuais. — Os múltiplos e submúltiplos usuais do metro são os seguintes:

Nomes	*Símbolos*	*Valores*
quilômetro	km	1 000 m
hectômetro	hm	100 m
decâmetro	dam	10 m
metro	m	1 m
decímetro	dm	0,1 m
centímetro	cm	0,01 m
milímetro	mm	0,001 m
micron	μ	0,000 001 m
milimicron	mμ	0,000 000 001 m
decimilimicron	d mμ ou Å	0,000 000 000 1 v
micromicron	$\mu\mu$	0,000 000 000 001 m
milha marítima internacional	M ou '	1 852 m

A relação entre as unidades de comprimento, com excessão da milha marítima internacional, pode ser expressa assim: *cada unidade de comprimento é dez vêzes maior que a imediatamente inferior.*

261. Mudança de unidade. — Consideremos o número

435,278 dam,

formado de 4 quilômetros, 3 hectômetros, 5 decâmetros, 2 metros, 7 decímetros e 8 centímetros.

Se transportarmos a vírgula uma casa para a direita e dermos à parte inteira a designação da unidade imediatamente seguinte (*metro*), o número resultante

4 352,78 m

será igual ao primitivo, uma vez que se comporá também de 4 quilômetros, 3 hectômetros, 5 decâmetros, 2 metros, 7 decímetros e 8 centímetros.

Assim, podemos escrever

$$4\,352{,}78 \text{ m} = 435{,}278 \text{ dam} = 43{,}527\,8 \text{ hm} = 4{,}352\,78 \text{ km}.$$

A escolha da unidade depende da grandeza que se desejar medir. Em geral, a medida das grandes distâncias, como trechos de estradas de rodagem, é expressa em quilômetros. As pequenas distâncias são freqüentemente referidas a metros e centímetros.

Na medida das grandes distâncias pode-se empregar, além de quilômetro, a *milha marítima internacional*, cujo valor é o seguinte:

$$1 \text{ M} = 1852 \text{ m}.$$

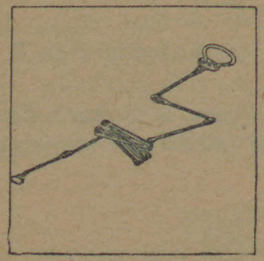
262. Medidas efetivas. — Empregam-se constantemente as seguintes:

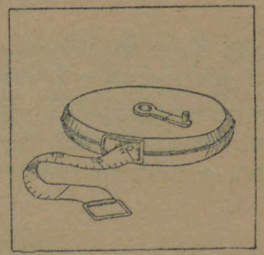
decímetro e *duplo decímetro*,
metro e *duplo metro*,
decâmetro e *duplo decâmetro*.

As duas primeiras, muito usadas pelos desenhistas e pelos estudantes, são réguas rijas de metal, madeira ou celulóide, geralmente graduadas em milímetros.

O metro e o duplo metro são muito usados, seja sob a forma de réguas rijas como as de que se servem os negociantes ou sob a forma de réguas articuladas como as empregadas pelos operários de construção.

Finalmente, as duas últimas, denominadas trenas e correntes, são empregadas pelos agrimensores em medições de terrenos. As trenas são fitas metálicas ou de pano e as correntes são formadas de pequenas hastes metálicas ligadas por anéis.





263. Exercícios resolvidos. — 1.º *Converter 25 milhas em quilômetros.*

Tendo-se em vista que

$$1\ \text{M} = 1\,852\ \text{m} = 1{,}852\ \text{km},$$

vem

$$25\ \text{M} = 25 \times 1{,}852\ \text{km} = 46{,}300\ \text{km}.$$

2.º *Efetuar a adição seguinte:*

$$2{,}435\ \text{dam} + 3{,}482\ \text{hm} + 0{,}327\ \text{km},$$

dando o resultado em metros.

Reduzindo as parcelas à mesma unidade, isto é, ao metro e somando, encontramos

$$\begin{aligned} 2{,}435\ \text{dam} &= 24{,}35\ \text{m} \\ 3{,}482\ \text{hm} &= 348{,}20\ \text{m} \\ 0{,}327\ \text{km} &= 327{,}00\ \text{m} \\ \hline \text{Soma} &= 699{,}55\ \text{m}. \end{aligned}$$

264. Exercícios propostos.

1. Exprimir 3 724,8 m em hectômetros. R. 37,248 hm.
2. Exprimir 125,32 dam em quilômetros. R. 1,253 2 km.
3. Exprimir 5,728 km em decâmetros. R. 572,8 dam.
4. Converter 7,465 m em centímetros. R. 746,5 cm.
5. Converter 0,352 7 dam em centímetros. R. 352,7 cm.
6. Converter 12 863 mm em hectômetros. R. 0,128 63 hm.
7. Converter 4,5 milhas em quilômetros. R. 8,334 km.

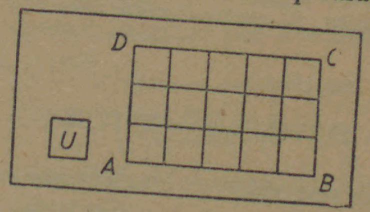
8. Converter 125 milhas em hectômetros. R. 231 5 hm.
9. Efetuar o produto 18,524 mm × 7,5, dando o resultado em metros. R. 0,138 93 m.
10. Efetuar o produto 0,825 dam × 32, dando o resultado em centímetros. R. 26 400 cm.

265. Área de uma figura plana. — Prosseguindo no estudo das unidades usadas na medição das grandezas geométricas, devemos apresentar agora as unidades de área do nosso sistema legal.

Área de uma figura é a medida da sua superfície.

Unidade de área é a área do quadrado cujo lado é a unidade de comprimento.

Exemplo: Se o lado de cada um dos quadrados que há no retângulo visto na figura abaixo medir um centímetro a área do retângulo será 15 centímetros quadrados; se medir um decímetro a área do retângulo será 15 decímetros quadrados.



266. Unidade legal de área. — A unidade legal de área é o *metro quadrado* cujo símbolo é m^2.

O metro quadrado é a área do quadrado no qual o lado tem o comprimento de um metro.

Damos a seguir o quadro dos múltiplos e submúltiplos usuais do metro quadrado.

Nomes	*Símbolos*	*Valores*
Quilômetro quadrado	km^2	1 000 000 m^2
Hectômetro quadrado	hm^2	10 000 m^2
Decâmetro quadrado	dam^2	100 m^2
Metro quadrado	m^2	1 m^2
Decímetro quadrado	dm^2	0,01 m^2
Centímetro quadrado	cm^2	0,000 1 m^2
Milímetro quadrado	mm^2	0,000 001 m^2
Hectare	ha	10 000 m^2
Are	a	100 m^2
Centiare	ca	1 m^2

A relação entre as unidades de área é a seguinte: *cada unidade de área é cem vêzes maior que a imediatamente inferior.* — Exemplo:

$$3 \text{ m}^2 = 300 \text{ dm}^2.$$

267. **Mudança de unidade.** — Consideremos o número

$$25{,}370\,6 \text{ dam}^2,$$

formado de 25 decâmetros quadrados, 37 metros quadrados e 6 decímetros quadrados.

Se transportarmos a vírgula duas casas para a direita e dermos à parte inteira a designação da unidade imediatamente seguinte (*metro quadrado*), o número resultante

$$2\,537{,}06 \text{ m}^2$$

será igual ao primitivo, por isso que se compõe também de 25 decâmetros quadrados, 37 metros quadrados e 6 centímetros quadrados.

Assim, pode-se escrever

$$25{,}370\,6 \text{ dam}^2 = 2\,537{,}06 \text{ m}^2.$$

268. **Exercícios resolvidos.** — 1.º *Exprimir em centiares a área de 0,45 hectares.*

Notando que

$$1 \text{ ha} = 100 \text{ a} = 10\,000 \text{ ca},$$

segue-se que

$$0{,}45 \text{ ha} = 0{,}45 \times 10\,000 \text{ ca} = 4\,500 \text{ ca}.$$

2.º *Exprimir em hectares a área de 75 000 metros quadrados.*

Tendo-se em conta que

$$1 \text{ ha} = 10\,000 \text{ m}^2,$$

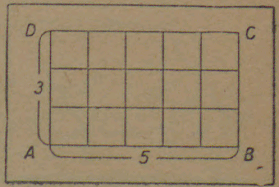
vem

$$75\,000 \text{ m}^2 = 75\,000 : 10\,000 \text{ ha} = 7{,}5 \text{ ha}.$$

269. **Áreas das principais figuras planas.** — Como vimos, a medição indireta de uma grandeza visa obter sua medida mediante relações que a ligam a outras conhecidas.

Tais relações são indicadas em expressões denominadas *fórmulas*, as quais traduzem as regras que devem ser aplicadas na medição indireta das grandezas geométricas.

270. **Área do retângulo.** — Consideremos o retângulo visto na figura ao lado, no qual a base AB contém 5 vêzes a unidade de comprimento adotada, o centímetro por exemplo, e a altura AD contém 3 vêzes a mesma unidade.



Marcando os pontos que assim dividem a base e a altura por êles tracemos paralelas aos lados do retângulo. Êste fica decomposto em 15 quadrados de lado igual à unidade escolhida.

A área do retângulo dado, é portanto,

$$5 \times 3 = 15$$

unidades de área (centímetro quadrado). — **Logo:**

A área do retângulo é igual ao produto da base pela altura.

De modo geral, representando por b a base e por h a altura de um retângulo, temos

$$\boxed{S = b \times h.}$$

Com auxílio dessa fórmula pode-se calcular a área de qualquer retângulo. — Exemplo:

Calcular a área do retângulo cuja base mede 2,35 m e cuja altura mede 0,42 m.

Aplicando a fórmula

$$S = b \times h,$$

encontramos

$$S = 2{,}35 \times 0{,}42$$
$$S = 0{,}987\,0 \text{ m}^2.$$

271. **Área do quadrado.** — O quadrado é um retângulo no qual a base é igual à altura. — Portanto:

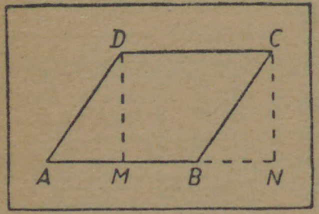
A área de um quadrado é igual ao quadrado do lado.

Representando por a o lado do quadrado, temos

$$\boxed{S = a^2.}$$

272. **Área do paralelogramo.** — Se cortarmos, do paralelogramo A B C D, o triângulo retângulo A M D e o ajustarmos ao

lado B C formaremos o retângulo M N C D, cuja área, como sabemos, é dada pelo produto da base pela altura. — Logo:



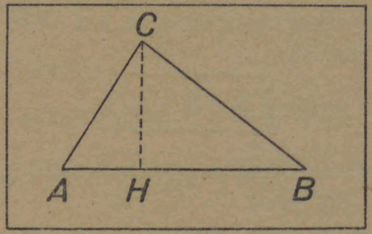
A área de um paralelogramo é igual ao produto da base pela altura.

Representando por b a base e por h a altura de um paralelogramo temos

$$\boxed{S = b \times h.}$$

273. **Área do triângulo.** — Como é fácil imaginar, a área de um triângulo é a metade da área do paralelogramo que tem a mesma base e a mesma altura. — Portanto:

A área de um triângulo é igual à metade do produto da base pela altura.

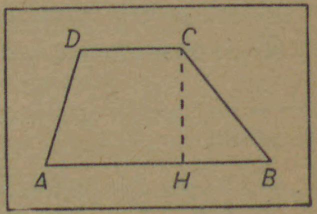


Representando por b a base e por h a altura de um triângulo, temos

$$\boxed{S = \frac{b \times h}{2}.}$$

274. **Área do trapézio.** — *A área de um trapézio é igual à semi-soma das bases multiplicada pela altura.*

Consideremos o trapézio A B C D, visto na figura ao lado.



Designando por S a área do trapézio temos

$$S = \frac{AB + CD}{2} \times CH.$$

De modo geral, designando por b e b' as bases de um trapézio e por h a altura, temos

$$\boxed{S = \frac{b + b'}{2} \times h.}$$

275. **Área do círculo.** — A área de um círculo qualquer é igual ao quadrado do comprimento do raio multiplicado por certo número, sempre o mesmo.

Êsse número constante representa-se pela letra grega π (lê-se pi). O seu valor tomado com 4 decimais é

$$\pi = 3{,}141\,6.$$

Assim, designando por S a área do círculo e pela letra R o raio, temos

$$\boxed{S = \pi R^2.}$$

Exemplo: *Calcular a área do círculo cujo raio mede 1,8 m.*

Aplicando a fórmula

$$S = \pi R^2,$$

encontramos

$$S = 3{,}14 \times 1{,}8^2,$$
$$S = 3{,}14 \times 3{,}24,$$
$$S = 10{,}173\,6 \text{ m}^2.$$

276. **Exercícios resolvidos.** — 1.º *Calcular a área de um retângulo sabendo-se que a base mede 12 cm e que a altura é igual a um têrço da base.*

A base do retângulo dado é

$$b = 12 \text{ cm}.$$

Sendo a altura igual a um têrço da base, temos

$$h = 12 \text{ cm} : 3 = 4 \text{ cm}.$$

Aplicando, agora, a fórmula

$$S = b \times h,$$

encontramos

$$S = 12 \text{ cm} \times 4 \text{ cm} = 48 \text{ cm}^2.$$

2.º *A base maior de um trapézio é igual ao triplo da menor e esta mede 60 cm. Sabendo-se que a altura dêsse trapézio é 0,75 cm, exprimir em decímetros quadrados sua área.*

A área do trapézio é dada pela fórmula

$$S = \frac{b + b'}{2} \times h.$$

Temos

$$b' = 60 \text{ cm} = 6 \text{ dm},$$
$$b = 6 \text{ dm} \times 3 = 18 \text{ dm},$$
$$h = 0{,}75 \text{ m} = 7{,}5 \text{ dm}.$$

Aplicando a fórmula, vem

$$S = \frac{18 + 6}{2} \times 7{,}5,$$
$$S = 12 \times 7{,}5,$$
$$S = 90 \text{ dm}^2.$$

277. Exercícios propostos.

1. Um retângulo tem 1,25 m de base e 48 cm de altura. Exprimir sua área em decímetros quadrados. R. 60 dm².
2. Exprimir em metros quadrados a área do paralelogramo cuja base mede 0,75 hm e cuja altura mede 3,8 dam. R. 2 850 m².
3. A base de um triângulo mede 72 cm e a altura 3,5 dm. Exprimir sua área em metros quadrados. R. 0,126 0 m².
4. A área de um retângulo mede 1,98 m² e a base tem 2,2 m. Calcular a altura. R. 0,9 m.
5. Calcular a base do paralelogramo cuja área mede 4,833 6 dm² e cuja altura mede 1,52 dm. R. 3,18 dm.
6. Um terreno de forma retangular tem o comprimento de 3,25 dam e a largura igual ao triplo do comprimento. Exprimir sua área em metros quadrados. R. 3 168,75 m².
7. A base de um triângulo mede 2,16 m e a altura é igual a um têrço da base. Calcular a área dêsse triângulo. R. 0,777 6 m².
8. Calcular a altura do triângulo cuja base mede 1,28 cm e cuja área mede 0,16 cm². R. 0,25 cm.
9. As bases de um trapézio medem 1,2 dam e 0,18 hm, respectivamente; a altura tem 5 m. Exprimir em metros quadrados a área dêsse trapézio. R. 75 m².
10. A base maior de um trapézio mede 2,4 m e a menor é igual a um têrço da maior. Calcular a área dêsse trapézio, sabendo-se que sua altura tem 0,85 m. R. 1,36 m².

11. Calcular a área do círculo cujo raio mede 5 m. R. 78,50 m².
12. O lado de um quadrado mede 2,5 m. Exprimir em ares a área dêsse quadrado. R. 0,062 5 a.
13. Exprimir em hectares a área do retângulo cujas dimensões são 12,7 m e 5,2 dam. R. 0,066 04 ha.
14. Num paralelogramo a base mede 35 dam e a altura 2 hm. Exprimir em hectares a área dêsse paralelogramo. R. 7 ha.
15. A base de um paralelogramo mede 60 hm e a altura 7 km. Exprimir em hectares a área dêsse paralelogramo. R. 4 200 ha.

278. **Noção de volume.** — Todo corpo ocupa certa porção do espaço; a extensão dessa porção de espaço é uma grandeza geométrica, denominada *volume* do corpo.

Medir o volume de um corpo significa compará-lo com outro escolhido para unidade de volume.

Unidade de volume é o volume do cubo cuja aresta é a unidade de comprimento.

Assim, se a aresta do cubo medir um metro, a unidade de volume será o metro cúbico; se medir um decímetro, a unidade de volume será o decímetro cúbico.

279. **Unidades legais de volume.** — A primeira unidade legal de volume é o *metro cúbico*, cujo símbolo é m^3.

O metro cúbico é o volume do cubo cuja aresta tem o comprimento de um metro.

Damos a seguir o quadro dos múltiplos e submúltiplos usuais do metro cúbico.

Nome	*Símbolo*	*Valor*
quilômetro cúbico	km³	1 000 000 000 m³
metro cúbico	m³	—
decímetro cúbico	dm³	0,001 m³
centímetro cúbico	cm³	0,000 001 m³
milímetro cúbico	mm³	0,000 000 001 m³

A relação entre as unidades de volume é a seguinte:

Cada unidade de volume é mil vêzes maior que a imediatamente inferior. — Exemplo:

$$12 \text{ m}^3 = 12\,000 \text{ dm}^3.$$

Essa relação decorre do fato de, em um cubo de 1 metro de aresta, poderem ser colocados mil cubos de 1 decímetro de aresta.

280. **Mudança de unidade.** — Consideremos o número

$$254{,}032\,845 \text{ m}^3,$$

composto de 254 metros cúbicos, 32 decímetros cúbicos e 845 centímetros cúbicos.

Se transportarmos a vírgula três casas para a direita e dermos à parte inteira a designação da unidade imediatamente seguinte, o número resultante

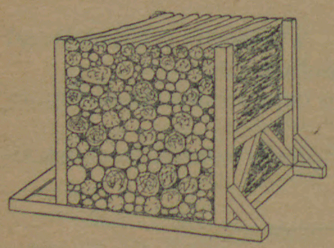
$$254\,032{,}845 \text{ dm}^3$$

será igual ao primitivo, uma vez que se comporá também de 254 metros cúbicos, 32 decímetros cúbicos e 845 centímetros cúbicos.

Assim, podemos escrever

$$254{,}032\,845 \text{ m}^3 = 254\,032{,}845 \text{ dm}^3 = 254\,032\,845 \text{ cm}^3.$$

281. **Medidas de volume de lenha.** — Quando o metro cúbico é utilizado na medida do volume aparente da lenha pode receber a denominação de *estéreo.*



O estéreo é representado com o símbolo *st,* tendo os seguintes múltiplo e submúltiplo decimais:

decistéreo = 0,1 do metro cúbico.

decastéreo = 10 metros cúbicos

O decastéreo é designado com o símbolo *dast* e o decistéreo com o símbolo *dst.*

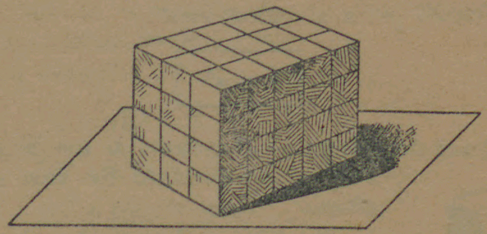
Para reduzir à unidade legal um número referido a estéreos basta ter em vista a correspondência acima. — Exemplo:

$$7{,}234 \text{ dast} = 7{,}234 \times 10 \text{ m}^3 = 72{,}340 \text{ m}^3.$$

282. **Volumes dos principais sólidos.** — Os volumes dos sólidos podem ser obtidos indiretamente com auxílio de fórmulas, as quais indicam as operações que se devem efetuar em cada caso para êsse fim.

283. **Volume do paralelepípedo retângulo.** — Consideremos o paralelepípedo retângulo visto na figura a seguir.

O paralelepípedo dado pode ser decomposto em cubos iguais representando cada um dêles a unidade de volume, o centímetro cúbico, por exemplo.



Vejamos quantos cubos contém o paralelepípedo; cada camada horizontal é formada de

$$3 \times 5 = 15 \text{ cubos};$$

e como há 4 camadas, o número total de cubos é

$$3 \times 5 \times 4 = 60.$$

Diz-se então que o volume do paralelepípedo é igual a 60 unidades (centímetros cúbicos).

Os números 3, 5 e 4 medem respectivamente as três arestas que partem de um mesmo vértice do paralelepípedo: *comprimento, largura* e *altura.* Denominam-se elas *dimensões* do paralelepípedo. — Logo:

O volume de um paralelepípedo retângulo é igual ao produto de suas três dimensões.

Designando-as por *a, b* e *c* respectivamente, temos

$$\boxed{V = a \times b \times c.}$$

Exemplo: *num paralelepípedo retângulo, o comprimento mede 15 m, a largura 8 m e a altura 7 m; calcular o volume.*

Aplicando a fórmula

$$V = abc,$$

encontramos

$$V = 15 \text{ m} \times 8 \text{ m} \times 7 \text{ m},$$

$$V = 840 \text{ m}^3.$$

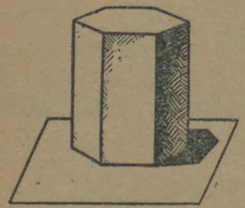
284. **Volume do cubo.** — O cubo é um paralelepípedo retângulo cujas dimensões são iguais. — Portanto:

O volume de um cubo é igual ao cubo da aresta.

Representando por a a aresta, temos

$$\boxed{V = a^3.}$$

285. **Volume do prisma.** — *O volume de um prisma qualquer é igual ao produto da área da base pela altura.*



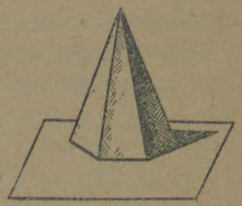
Representando por B a área da base de um prisma e por h a altura, temos

$$\boxed{V = B \times h.}$$

Com auxílio da fórmula acima, podemos calcular o volume de qualquer prisma.

286. **Volume da pirâmide.** — O volume de uma pirâmide é igual à têrça parte do volume do prisma que tem a mesma base e a mesma altura. — Portanto:

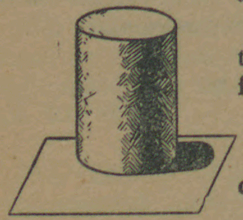
O volume de uma pirâmide é igual a um têrço do produto da área da base pela altura.



Representando por B a área da base e por h a altura, o volume de qualquer pirâmide é dado pela fórmula

$$\boxed{V = \frac{B \times h}{3}.}$$

287. **Volume do cilindro.** — *O volume de um cilindro é igual ao produto da área da base pela altura.*



Representando por B a área e por h a altura, o volume de um cilindro será dado pela fórmula

$$V = B \times h.$$

Mas, notando que a base do cilindro é um círculo, temos

$$B = \pi R^2.$$

Assim, a fórmula que dá o volume de um cilindro é a seguinte:

$$\boxed{V = \pi R^2 \times h.}$$

Exemplo: *Calcular o volume do cilindro cujo raio da base mede 5 m e cuja altura mede 2,4 m.*

Aplicando a fórmula

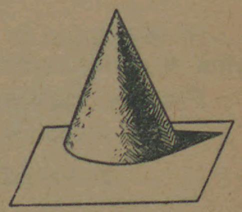
$$V = \pi R^2 \times h,$$

encontramos

$$V = 3{,}14 \times 5\text{ m} \times 5\text{ m} \times 2{,}4\text{ m},$$
$$V = 188{,}400\text{ m}^3.$$

288. **Volume do cone.** — O volume de um cone é igual à têrça parte do volume do cilindro que tem a mesma base e a mesma altura. — Logo:

O volume de um cone é igual a um têrço do produto da área da base pela altura.



Designando por B a área da base e por h a altura, o volume do cone será

$$V = \frac{Bh}{3}.$$

Mas, notando que a base do cone é um círculo, temos

$$B = \pi R^2.$$

Portanto:

$$\boxed{V = \frac{\pi R^2 h}{3}.}$$

289. **Volume da esfera.** — *O volume de uma esfera se obtém multiplicando o cubo do raio por 4π e dividindo o resultado por 3.*

Representando pela letra R o raio, o volume da esfera será dado pela fórmula

$$\boxed{V = \frac{4\pi R^3}{3}.}$$

Com auxílio da fórmula acima, pode-se calcular o volume de qualquer esfera.

290. **Segunda unidade de volume.** — A segunda unidade legal de volume é o *litro*, cujo símbolo é *l*.

O *litro* é o volume de 1 quilograma de água destilada e isenta de ar, à temperatura de 4 graus centígrados e sob a pressão atmosférica normal.

Damos a seguir o quadro dos múltiplos e submúltiplos usuais do litro.

Nome	*Símbolo*	*Valor*
hectolitro	hl	100 l
decalitro	dal	10 l
litro	l	—
decilitro	dl	0,1 l
centilitro	cl	0,01 l
mililitro	ml	0,001 l

As mudanças de unidade de capacidade se fazem tendo em vista as correspondências estabelecidas no quadro anterior.

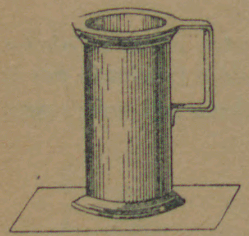
Exemplo: *exprimir em litros o volume de 24 309 mililitros.*

Temos, sucessivamente,

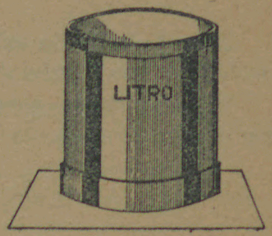
$$24\,309 \text{ ml} = 2\,430{,}9 \text{ cl} = 243{,}09 \text{ dl} = 24{,}309 \text{ l}.$$

291. **Observação.** — Para fins legais o litro pode ser considerado como equivalente a um decímetro cúbico.

292. **Medidas efetivas.** — As medidas efetivas de capacidade são utilizadas na prática para a medição de volume de gases e líquidos, cereais e materiais pulverulentos ou granulosos. — Usam-se, freqüentemente, as seguintes:



decilitro,
duplo decilitro
meio litro
litro
duplo litro
decalitro.



293. **Exercícios resolvidos.** — 1.º *Exprimir em metros cúbicos o volume do paralelepípedo retângulo cujas dimensões são 30 dm, 0,56 dam e 0,34 m.*

Reduzindo ao metro os números dados, temos

$$a = 30 \text{ dm} = 3 \text{ m},$$
$$b = 0{,}56 \text{ dam} = 5{,}6 \text{ m},$$
$$c = 0{,}34 \text{ m}.$$

Aplicando a fórmula do volume do paralelepípedo retângulo,

$$V = abc,$$

encontramos

$$V = 3 \text{ m} \times 5{,}6 \times 0{,}34 \text{ m},$$
$$V = 5{,}712 \text{ m}^3.$$

2.º *Quantos litros de água comporta uma caixa cilíndrica, tendo 6 m de diâmetro e 2 m de altura?*

O volume do cilindro é dado pela fórmula

$$V = \pi R^2 h.$$

Temos

$$\pi = 3{,}14, \quad R = 6 \text{ m} : 2 = 3 \text{ m}, \quad h = 2 \text{ m}.$$

Substituindo, vem

$$V = 3{,}14 \times 3 \text{ m} \times 3\text{m} \times 2 \text{ m},$$
$$V = 56{,}520 \text{ m}^3.$$

Convertendo o resultado obtido em litros, encontramos

$$V = 56{,}520 \text{ m}^3 = 56\,520 \text{ l}.$$

294. **Exercícios propostos.**

1. Exprimir em metros cúbicos o volume do paralelepípedo retângulo, cujas dimensões são, respectivamente, 30 dm, 0,51 dam e 0,34 m. R. 5,202 m³.
2. Exprimir em decímetros cúbicos o volume do paralelepípedo retângulo, cujas dimensões são, respectivamente, 0,7 m, 30 cm e 800 mm. R. 168 dm³.
3. A aresta de um cubo mede 25 dm; exprimir em metros cúbicos o volume dêsse cubo. R. 15,625 m³.
4. A aresta de um cubo mede 10,3 cm; exprimir em decímetros cúbicos o volume dêsse cubo. R. 1,092 727 dm³.
5. A área da base de um prisma é igual a 257 dm² e a altura mede 73 cm; exprimir em metros cúbicos o volume dêsse prisma. R. 1,876 100 m³.
6. Exprimir em decímetros cúbicos o volume do prisma, cuja área da base tem 0,06 m² e cuja altura mede 5,4 m. R. 324 dm³.

7. Exprimir em decímetros cúbicos o volume de uma pirâmide, cuja área da base mede 0,84 m² e cuja altura tem 0,1 dam. R. 280 dm³.

8. A área da base de uma pirâmide mede 0,431 2 dam², e a altura 1,8 dam exprimir em metros cúbicos o volume da pirâmide. R. 258,720 m³.

9. A altura de uma pirâmide mede 1,2 dm e a base é um quadrado de lado igual a 36 cm. Exprimir em metros cúbicos o volume dessa pirâmide. R. 0,005 184 m³.

10. A altura de uma pirâmide mede 0,8 dam e a base é um retângulo cujas dimensões são 90 dm e 720 cm. Exprimir em metros cúbicos o volume dessa pirâmide. R. 172,800 m³.

11. O raio da base de um cilindro mede 30 dm e a altura 20 dm. Exprimir em metros cúbicos o volume dêsse cilindro. R. 56,520 m³.

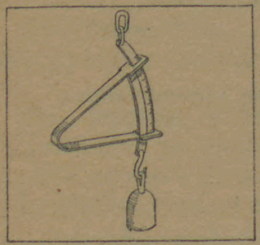
12. A altura de um cilindro é igual ao dôbro do raio da base e êste mede 30 dm. Exprimir em metros cúbicos o volume. R. 169,560 m³.

13. Quantos litros de água comporta uma caixa cilíndrica com 8 m de diâmetro e 15 m de altura? R. 753 600 l.

14. A altura de um cone mede 25 dm e o raio da base 150 cm. Exprimir em metros cúbicos o volume dêsse cone. R. 5,887 500 m³.

15. O raio de uma esfera mede 40 dm. Exprimir em metros cúbicos o volume dessa esfera. R. 267,946 m³.

295. **Pêso e massa.** — Antes de iniciar o estudo das unidades de massa devemos estabelecer a indispensável distinção entre o *pêso* e a *massa* de um corpo.



A *massa* de um corpo é a quantidade de matéria nêle contida; é sempre a mesma seja qual fôr o lugar da Terra em que se encontre o corpo.

O *pêso* de um corpo é a resultante das ações da fôrça que o atrai para o centro da Terra sôbre as suas moléculas; depende não só do corpo como também do lugar da Terra em que se encontra.

A fôrça que atrai os corpos para o centro da Terra chama-se *gravidade*.

O pêso de um corpo não é o mesmo em dois lugares diferentes, variando do equador ao pólo, do nível do mar às grandes altitudes.

Essas variações podem ser observadas mediante as distensões que o corpo imprime a uma mola sensível, conforme a figura acima.

296. **Unidade legal.** — A unidade legal de massa é o *quilograma* cujo símbolo é *kg*.

O quilograma é a massa do protótipo internacional do quilograma de platina iridiada que foi sancionado pela 1.ª Conferência Geral de Pesos e Medidas e que se acha depositado na Repartição Internacional de Pesos e Medidas.

Na formação dos múltiplos e submúltiplos da unidade legal, toma-se como base o grama, *equivalente* a 0,001 do quilograma.

Os múltiplos e submúltiplos da unidade legal são os seguintes:

Nome	*Símbolo*	*Valor*
tonelada	t	1 000 000 g
quilograma	kg	1 000 g
hectograma	hg	100 g
decagrama	dag	10 g
grama	g	1 g
decigrama	dg	0,1 g
centigrama	cg	0,01 g
miligrama	mg	0,001 g
quilate	—	0,2 g

As medidas das massas de pedras e metais preciosos são referidas ao *quilate*, cuja massa é de 2 decigramas.

297. **Mudança de unidade.** — As mudanças de unidade se fazem como para as unidades de comprimento, por isso que a relação entre duas unidades consecutivas é 10.

Exemplo:

$$3{,}194\,3 \text{ kg} = 31{,}943 \text{ hg} = 319{,}43 \text{ dag} = 3\,194{,}3 \text{ g} = 31\,943 \text{ dg}.$$

Excetuam-se dessa regra as mudanças entre a tonelada e o quilograma, cuja relação é

$$1 \text{ t} = 1\,000 \text{ kg},$$

e as mudanças entre o quilate e o decigrama, cuja relação é

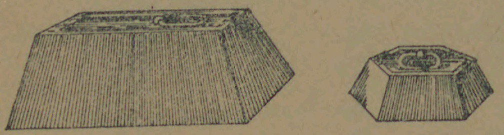
$$1 \text{ quilate} = 2 \text{ dg}.$$

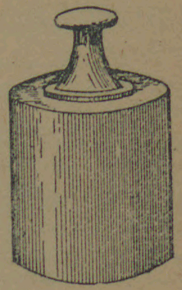
298. **Medidas efetivas.** — Usam-se três séries de medidas efetivas de massa.

A primeira série, destinada à medida das *grandes massas*, consta de dez medidas, fabricadas em ferro fundido, variando de 50 kg a 50 g; as duas primeiras do grupo têm a forma da figura à esquerda e as demais a da figura ao centro.

A segunda série, empregada na medida das *massas médias,* consta de treze medidas, fabricadas em latão ou cobre, distribuídas de 10 kg a 1 g; têm a forma cilíndrica, com a altura igual ao diâmetro, e são providas de botões, conforme a figura à direita.

A terceira série, destinada à medida das *pequenas massas,* consta de nove medidas, em





lâminas de cobre, variando de 5 dg a 1 mg; estas medidas são geralmente usadas nos laboratórios para as *pesadas de precisão.*

299. **Exercícios.**

1. Converter 2,35 t em quilogramas. R. 2 350 kg.
2. Converter 128,47 hg em quilogramas. R. 12,847 kg.
3. Converter 5 328,5 dag em quilogramas. R. 53,285 kg.
4. Exprimir 28,3 dg em gramas. R. 2,83 g.
5. Exprimir 275,8 cg em gramas. R. 2,758 g.
6. Exprimir 4 321,5 mg em gramas. R. 4,321 5 g.
7. Referir ao grama uma medida de 18 quilates. R. 3,6 g.
8. Referir ao centigrama uma medida de 24 quilates. R. 480 cg.
9. Referir ao quilate uma medida de 2,16 g. R. 10,8.
10. Referir ao quilate uma medida de 540 mg. R. 2,7.

300. **Noção de densidade.** — Imaginemos dois modelos de cubo iguais, o primeiro construído de madeira e o segundo de chumbo, tendo cada um a aresta igual a um centímetro.

Como sabemos, os volumes dêsses cubos serão iguais a 1 centímetro cúbico.

Se medirmos as massas dos cubos considerados com auxílio da balança, verificamos que

1 cm³ de chumbo tem a massa de 11,70 g

1 cm³ de madeira tem a massa de 1,54 g.

Dizemos então que, dados dois volumes iguais, um de chumbo e outro de madeira, a massa do chumbo é maior que a da madeira.

Em outras palavras, poderíamos dizer que o chumbo é mais *denso* que a madeira ou que tem *densidade* maior que a madeira.

301. **Definição.** — Chama-se *densidade absoluta* ou massa específica de um corpo a massa da unidade de volume dêsse corpo.

Se adotarmos como unidade de volume o centímetro cúbico e de massa o grama, dizemos, por exemplo, que a densidade absoluta da prata é 10,5 por isso que 1 centímetro cúbico de prata tem a massa de 10,5 g.

A densidade absoluta de um corpo homogêneo é uma grandeza composta definida pelo quociente de duas outras: da massa total do corpo pelo seu volume:

densidade absoluta = massa: volume.

302. **Unidade legal.** — A unidade legal de massa específica ou densidade absoluta é o *grama por centímetro cúbico,* cujo símbolo é g/cm^3.

O grama por centímetro cúbico é a massa específica de um corpo homogêneo no qual cada centímetro cúbico tem a massa de 1 grama.

As unidades principais de massa específica são as seguintes:

Nome	*Símbolo*	*Valor*
grama por centímetro cúbico	g/cm^3	$1\ g/cm^3$
quilograma por decímetro cúbico	kg/dm^3	$1\ g/cm^3$
tonelada por metro cúbico	t/m^3	$1\ g/cm^3$
quilograma por metro cúbico	kg/m^3	$0{,}001\ g/cm^3$
grama por metro cúbico	g/m^3	$0{,}000\ 001\ g/cm^3$

A massa específica da água destilada e isenta de ar, à temperatura de 4º C, pode ser considerada, para fins legais, como equivalente a $1\ g/cm^3$.

303. **Observação.** — A relação entre a massa específica de um corpo e a de outro tomado para têrmo de comparação é uma grandeza denominada *densidade relativa.*

Ao usar a expressão densidade relativa de um corpo é indispensável mencionar explìcitamente o corpo tomado como têrmo de comparação, salvo quando êste tem a massa específica igual a 1 g/cm^3.

304. **Mudança de unidade.** — As mudanças de unidade se fazem de acôrdo com as correspondências estabelecidas no quadro anterior. — Exemplos:

1.º *A densidade absoluta de um corpo é expressa por 120 kg/m³; referi-la ao g/cm³.*

Temos

$$1 \text{ kg/m}^3 = 0{,}001 \text{ g/cm}^3.$$

Portanto:

$$120 \text{ kg/m}^3 = 120 \times 0{,}001 \text{ g/cm}^3 = 0{,}120 \text{ g/cm}^3.$$

2.º *A densidade absoluta de um corpo é expressa por 3,6 kg/dm³; exprimi-la em g/cm³.*

Temos

$$1 \text{ kg/dm}^3 = 1 \text{ g/cm}^3.$$

Portanto:

$$3{,}6 \text{ kg/dm}^3 = 3{,}6 \text{ g/cm}^3.$$

3.º *Uma substância tem a massa específica de 1,2 kg por litro; referi-la ao g/cm³.*

Considerando o litro equivalente ao decímetro cúbico (n.º 291), temos

$$1{,}2 \text{ kg/l} = 1{,}2 \text{ kg/dm}^3 = 1{,}2 \text{ g/cm}^3.$$

305. **Exercícios.**

1. A densidade absoluta de um corpo é dada por 150 kg/cm^3; exprimi-la em g/cm^3. R. $0{,}15 \text{ g/cm}^3$.
2. A massa específica de um corpo é expressa por $12{,}5 \text{ kg/dm}^3$; referi-la ao g/cm^3. R. $12{,}5 \text{ g/cm}^3$.
3. A densidade absoluta de um corpo é expressa por $10{,}5 \text{ kg/dm}^3$; exprimi-la em g/cm^3. R. $10{,}5 \text{ g/cm}^3$.
4. Uma substância tem a massa específica de 2,7 kg por litro; exprimi-la em g/cm^3. R. $2{,}7 \text{ g/cm}^3$.
5. A massa específica de uma substância é dada por $4{,}5 \text{ t/m}^3$; referi-la ao g/cm^3. R. $4{,}5 \text{ g/cm}^3$.

CAPÍTULO XVIII

UNIDADE DE ÂNGULO E DE TEMPO. UNIDADES INGLÊSAS E NORTE-AMERICANAS

306. **Unidade legal de ângulo.** — A primeira unidade legal de ângulo plano é o *ângulo reto,* cujo símbolo é *r.*

Ângulo reto é qualquer dos menores ângulos determinados por duas retas concorrentes que formam entre si ângulos adjacentes iguais.

Os múltiplos decimais do ângulo reto não têm designação própria; para os submúltiplos, a única designação usual é a do *grado.*

Os submúltiplos decimais do ângulo reto são os seguintes:

Nome	*Símbolo*	*Valor*
ângulo reto	r	1 r
grado	g ou gr	0,01 r
decígrado	dgr	0,001 r
centígrado	cgr	0,000 1 r
milígrado	mgr	0,000 01 r

O uso do símbolo *g* só é recomendado quando não possa haver dúvida quanto ao seu significado.

307. **Mudança de unidade.** — As mudanças de unidade se fazem de acôrdo com as correspondências dadas no quadrado acima. — Assim, para passar do ângulo reto ao grado, deve-se deslocar a vírgula duas casas para a direita; recìprocamente, a passagem do grado para o ângulo reto se faz deslocando a vírgula duas casas para a esquerda.

Por outro lado, na mudança de unidade entre os submúltiplos, desloca-se a vírgula uma única ordem para cada um.

Exemplo: *referir ao cgr um ângulo, cuja medida é 3,181 25 r.*

Temos, sucessivamente,

$$3{,}181\ 25\ r = 318{,}125\ gr = 3\ 181{,}25\ dgr = 31\ 812{,}5\ cgr.$$

308. **Segunda unidade legal de ângulo.** — A segunda unidade legal de ângulo é o grau sexagesimal, ou abreviadamente, o *grau*.

Indica-se o grau pelo símbolo ^{o}, escrito à direita e pouco acima do número que exprime a medida. — Exemplo:

$$90^o.$$

O grau é o ângulo equivalente a

$$\frac{1}{90}$$

do ângulo reto.

Os submúltiplos do grau são os seguintes:

Nome	*Símbolo*	*Valor*
grau sexagesimal ou grau	^{o}	$\frac{1}{90}$ r
minuto de ângulo ou minuto	′	$\frac{1^o}{60}$
segundo de ângulo ou segundo	″	$\frac{1'}{60}$

Os múltiplos decimais do grau não têm designação própria. As denominações *grau, minuto* e *segundo* só devem ser usadas quando não possa haver dúvida quanto ao seu significado.

309. **Mudança de unidade.** — Não sendo decimal a correspondência entre o grau e os seus submúltiplos, as mudanças de unidade se fazem de acôrdo com as regras estabelecidas para os números complexos.

310. **Transformações nas medidas dos ângulos.** — Consideremos os casos que se podem apresentar.

1.º *Referir ao grado uma medida expressa em graus.*

Como vimos,

$$1 \text{ grau} = \frac{1}{90} \text{ do reto.}$$

Assim, se dividirmos por 90 o número de graus de um ângulo dado, obteremos a medida dêsse ângulo referida ao reto.

Por outro lado, como

$$1 \text{ reto} = 100 \text{ grados,}$$

segue-se que, para obtermos a medida em grados do ângulo considerado basta multiplicar por 100 o quociente encontrado.

As operações indicadas consistem, assim, em multiplicar por

$$\frac{100}{90} \quad \text{ou} \quad \frac{10}{9}$$

o ângulo dado em graus. — Portanto:

Para referir ao grado uma medida expressa em graus, basta multiplicar-se o número de graus por $\frac{10}{9}$.

Exemplo: referir ao grado um ângulo de 36^o.

Aplicando a regra, encontramos

$$36 \times \frac{10}{9} = 40.$$

Logo:

$$36^o = 40 \text{ gr.}$$

2.º *Referir ao grau uma medida expressa em grados.*

Temos

$$1 \text{ reto} = 100 \text{ grados.}$$

Assim, para referir ao reto uma medida expressa em grados, basta dividi-la por 100.

Por outro lado, se multiplicarmos por 90 o quociente encontrado, obteremos a medida em graus do ângulo considerado.

As operações indicadas resumem-se, pois, em multiplicar por

$$\frac{90}{100} \quad \text{ou} \quad 0{,}9$$

o ângulo dado em graus. — Portanto:

Para referir ao grau uma medida expressa em grados, basta multiplicar por 0,9 o número de grados e transformar em complexo o resultado obtido.

Exemplo: referir ao grau um ângulo de 42 gr.

Aplicando a regra, encontramos

$$42 \times 0{,}9 = 37{,}8.$$

Logo:

$$42 \text{ gr} = 37^{\circ}{,}8.$$

311. **Observação.** — Há ainda uma outra unidade legal de ângulo plano — *o radiano* — da qual nos ocuparemos mais tarde.

312. **Unidade legal de tempo.** — A unidade legal de tempo é o *segundo*, cujo símbolo é *s* ou *seg*.

O segundo é o intervalo de tempo igual à fração

$$\frac{1}{86\,400}$$

do dia solar médio definido de acôrdo com as convenções astronômicas.

Os múltiplos e submúltiplos decimais do segundo não têm designação própria.

Damos a seguir os múltiplos usuais do segundo.

Os símbolos *d, m,* e *s* só devem ser usados quando não possa haver dúvida quanto ao seu significado.

Nome	*Símbolo*	*Valor*
dia	d ou da	1 s
hora	h	3 600 s
minuto	m ou min	60 s
segundo	s ou seg	86 400 s

São admitidas também as unidades de tempo estabelecidas pelas convenções usuais do calendário civil e da astronomia. — Exemplo: *mês, ano, século.*

313. **Mudança de unidade.** — Não sendo decimal a correspondência entre o segundo e os seus múltiplos, as mudanças de unidade dos intervalos de tempo se fazem de acôrdo com as regras estabelecidas para os números complexos.

314. **Unidades inglêsas e norte-americanas.** — Damos a seguir as unidades inglêsas e norte-americanas mais usuais no Brasil, acompanhadas dos nomes em português e em inglês, das respectivas abreviaturas e dos valores correspondentes às unidades legais brasileiras.

315. **Unidades de comprimento.** — A unidade principal de comprimento é a *jarda* (yard), correspondente a 0,914 4 m. A sua abreviatura é *yd.*

Os múltiplos e submúltiplos mais usuais da jarda são os seguintes:

Nome inglês	*Nome português*	*Abrev.*	*Valor*	*Conversão*
mile	milha	ml.	1 760 yd	1 609,329 6 m
yard	jarda	yd	—	0,914 4 m
foot	pé	ft	$\frac{1}{3}$ yd	0,304 8 m
inch	polegada	in	$\frac{1}{12}$ ft	0,025 4 m

Os pequenos comprimentos são expressos em jardas, pés e polegadas, ou simplesmente em pés e polegadas.

As grandes distâncias são expressas em milhas e jardas.

316. **Unidades de área.** — Damos a seguir as unidades usuais, com o nome em inglês e em português, acompanhados das respectivas abreviações e dos valores correspondentes em unidades legais brasileiras.

Nome inglês	*Nome português*	*Abrev.*	*Valor*	*Conversão*
square mile	milha quadr.	sq. mi.	—	259,00 ha
square yard	jarda quadr.	sq. yd.	9 sq. ft.	0,836 126 m²
square foot	pé quadr.	sq. ft.	144 sq. in.	9,290 3 dm²
square inch	polegada quadr.	sq. in.	—	6,451 6 cm²

As unidades milha quadrada, jarda quadrada, pé quadrado e polegada quadrada derivam-se das unidades de comprimento, correspondendo, respectivamente, às áreas dos quadrados sôbre elas construídos.

317. **Unidades de volume.** — Damos a seguir as unidades usuais de volume, com o nome em inglês e em português, acompanhadas das respectivas abreviações e dos valores correspondentes em unidades legais brasileiras.

Nome inglês	*Nome português*	*Abrev.*	*Valor*	*Conversão*
cubic yard	jarda cúbica	cu. yd.	27 cu. ft.	0,764 553 m³
cubic foot	pé cúbico	cu. ft.	1728 cu. in.	0,028 317 m³
cubic inch	polegada cúbica	cu. in.	—	16,387 cm³

318. **Unidades de capacidade.** — As unidades usuais de capacidade são as seguintes:

Nome inglês	*Nome português*	*Abrev.*	*Valor*	*Conversão*
gallon	galão	gal.	4 qt	4,543 9 l
quart	quarta	qt.	—	1,136 l

319. **Unidades de massa.** — As unidades usuais de massa são as seguintes:

Nome inglês	*Nome português*	*Abrev.*	*Valor*	*Conversão*
ton	tonelada	tn.	—	1 016,05 kg
pound	libra	lb.	16 oz	0,453 5 kg
ounce	onça	oz.	—	28,350 g

320. **Moeda inglêsa.** — A unidade monetária inglêsa é a *libra esterlina,* também denominada soberano.

A libra divide-se em 20 *xelins* ou soldos, e o xelim em 20 *pence* ou dinheiros. — Assim é que

1 libra = 20 xelins

1 xelim = 12 dinheiros.

Na designação de libras, xelins e dinheiros usam-se as abreviaturas seguintes:

Libras .... £

xelins .... s

dinheiros .... d

Assim para representar uma quantia em moeda inglêsa, escrevemos

15 £ 10 s 8 d,

ou simplesmente,

£ 15 - 10 - 8.

As frações de dinheiro são avaliadas em meios, quartos, oitavos, etc.

CAPÍTULO XIX

NÚMEROS COMPLEXOS; OPERAÇÕES; CONVERSÕES

321. **Números complexos e incomplexos.** — Admitamos que certo intervalo de tempo é representado pelo número

5 horas 20 minutos 10 segundos,

expresso em várias unidades de um mesmo sistema, mas que não são ligadas pelas relações decimais. Os números assim expressos denominam-se complexos.

Número complexo é todo número que se refere a duas ou mais unidades da mesma espécie, mas que não são ligadas pelas relações decimais. — Exemplo:

7 meses 10 dias 4 horas,

ou abreviadamente,

7 m 10 d 4 h.

Número incomplexo é todo número que se refere a uma unidade única. — Exemplo:

12 dias ou 12 d.

Os exemplos mais comuns de números complexos são as medidas de prazos ou de intervalos de tempo, as medidas de ângulo, as quantias em moeda inglêsa, etc.

322. **Redução de número complexo a incomplexo.** — Um número complexo pode ser reduzido a número incomplexo inteiro, referido à menor unidade que nêle figura, ou a uma fração de qualquer das outras unidades superiores.

Exemplo: *reduzir a segundos*

3 d 6 h 15 m 10 s.

Convertendo 3 dias em horas, temos

$$24 \times 3 = 72 \text{ horas.}$$

Essas 72 horas, somadas às 6 do número dado, produzem

$$72 + 6 = 78 \text{ horas.}$$

Convertendo 78 horas em minutos, encontramos

$$78 \times 60 = 4\,680 \text{ minutos.}$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 3 \\ \hline 72 \\ +6 \\ \hline 78 \\ \times 60 \\ \hline 4680 \\ +15 \\ \hline 4695 \\ \times 60 \\ \hline 281700 \\ +10 \\ \hline 281710 \end{array}$$

Somando êsses 4 680 minutos aos 15 do número proposto, obtemos

$$4\,680 + 15 = 4\,695 \text{ minutos.}$$

Transformando 4 695 minutos em segundos, vem

$$4\,695 \times 60 = 281\,700 \text{ segundos.}$$

Finalmente, somando êsses 281 700 segundos aos 10 do número considerado, temos

$$281\,700 + 10 = 281\,710 \text{ segundos.}$$

Na prática, dispõe-se a operação da maneira indicada ao lado.

Observação: o resultado obtido pode ser expresso em fração de qualquer das outras unidades superiores do número proposto.

323. **Redução de número incomplexo a complexo.** — O número dado pode ser inteiro, referido à menor unidade do sistema, ou ser expresso em fração de qualquer das outras unidades superiores.

Exemplo: *reduzir a complexo a fração da jarda*

$$\frac{17}{6}.$$

Dividimos 17 por 6; o quociente inteiro encontrado, 2, representa o número de jardas contidas na fração dada. Multiplicamos o resto dessa divisão por 3, que é o número de pés que a jarda contém:

$$5 \times 3 = 15 \text{ ft.}$$

Dividimos 15 por 6; o quociente inteiro obtido, 2, representa o número de pés. Multiplicamos o resto dessa divisão por 12, que é o número de polegadas que o pé contém:

$$3 \times 12 = 36 \text{ in.}$$

17	6
5	2 yd 2 ft 6 in
3	
15	
3	
12	
36	
0	

Finalmente, dividindo 36 por 6, encontramos o número de polegadas do complexo. — Temos, portanto,

$$\frac{17}{6} \text{ yd} = 2 \text{ yd } 2 \text{ ft } 6 \text{ in.}$$

324. Exercícios.

1. Reduzir 6 d 12 h 45 m 54 s a segundos. R. 564 354 s.
2. Transformar £ 0 - 15 - 10 em dinheiros. R. 190 d.
3. Transformar £ 10 - 0 - 8 em dinheiros. R. 2 408 d.
4. Transformar £ 15 - 7 - 9 em dinheiros. R. 3 693 d.
5. Quantas polegadas há em 15 jardas? R. 540 in.
6. Quantas polegadas há em 5 yd 2 ft 10 in? R. 214 in.
7. Quantas polegadas há em 6 yd 1 ft 9 in? R. 237 in.
8. Calcular a fração da libra equivalente a £ 0 - 16 - 8. R. $\frac{5}{6}$.
9. Reduzir 15°30′20″ à fração da unidade principal. R. $\frac{2\,791}{180}$.
10. Converter 6 000″ em complexo. R. 1°40′.
11. Reduzir a complexo 8 829 minutos. R. 6 d 3 h 9 m.
12. Reduzir a complexo 130 700 segundos. R. 1 d 12 h 18 m 20 s.
13. Reduzir 751 horas a semanas, dias e horas. R. 4 s 3 d 7 h.

14. Quantas libras, xelins e dinheiros há em 1 454 dinheiros? R. £ 6 - 1 - 2.
15. Quantas libras, xelins e dinheiros há em 2 425 dinheiros? R. £ 10 - 2 - 1.
16. Converter em complexo 182 polegadas inglêsas. R. 5 yd 2 in.
17. Converter em complexo 300 meias-polegadas. R. 4 yd 6 in.
18. Reduzir a complexo $\frac{5}{8}$ da hora. R. 37 m 30 s.
19. Reduzir a complexo $\frac{313}{96}$ do dia. R. 3 d 6 h 15 m.
20. Reduzir a complexo $\frac{15}{16}$ da libra. R. £ 0 - 18 - 9.

325. **Adição de complexos.** — Seja efetuar a seguinte soma de números complexos:

$$8 \text{ h } 40 \text{ m } 32 \text{ s} + 7 \text{ h } 30 \text{ m } 48 \text{ s} + 5 \text{ h } 25 \text{ m } 50 \text{ s}.$$

Iniciemos a operação somando os segundos que figuram nos números dados:

$$32 \text{ s} + 48 \text{ s} + 50 \text{ s} = 130 \text{ s}.$$

	1	2
8 h	40 m	32 s
7 h	30 m	48 s
5 h	25 m	50 s
21 h	97 m	130 s
21 h	37 m	10 s

Mas, notando que

$$130 \text{ s} = 120 \text{ s} + 10 \text{ s} = 2 \text{ m} + 10 \text{ s},$$

escrevemos, no resultado, 10 segundos, e juntamos 2 minutos à soma das unidades que, em os números dados, representam os minutos — Encontramos, assim,

$$2 \text{ m} + 40 \text{ m} + 30 \text{ m} + 25 \text{ m} = 97 \text{ m}.$$

Mas, por ser

$$97 \text{ m} = 60 \text{ m} + 37 \text{ m} = 1 \text{ h} + 37 \text{ m},$$

escrevemos, no resultado, 37 minutos e juntamos 1 hora à soma das horas dos números propostas. — Obtemos, assim,

$$1 \text{ h} + 8 \text{ h} + 7 \text{ h} + 5 \text{ h} = 21 \text{ h}.$$

Temos, portanto,

$$8 \text{ h } 40 \text{ m } 32 \text{ s} + 7 \text{ h } 30 \text{ m } 48 \text{ s} + 5 \text{ h } 25 \text{ m } 50 \text{ s} = \\ = 21 \text{ h } 37 \text{ m } 10 \text{ s}.$$

Na prática, dispõe-se a operação do modo indicado no quadro da página anterior.

Damos a seguir, mais alguns exemplos de adição de números complexos.

3 3	1 2	2 2
£ 14 - 18 - 11	12° 30′ 53″	5 yd 1 ft 6 in
£ 13 - 15 - 10	18° 27′ 38″	7 yd 0 ft 9 in
£ 12 - 14 - 6	25° 45′ 18″	8 yd 2 ft 5 in
£ 10 - 10 - 9	32° 13′ 37″	12 yd 1 ft 10 in
£ 52 - 60 - 36	88°117′146″	34 yd 6 ft 30 in
£ 52 - 0 - 0.	88° 57′ 26″.	34 yd 0 ft 6 in.

326. **Exercícios.**

Efetuar as operações seguintes:

1. $25° + 23°48' + 24°37'52''$. R. $73°25'52''$.
2. $28° + 15°35' + 25°48'54''$. R. $69°23'54''$.
3. $18°17'16'' + 29°28'27'' + 45°44'43''$. R. $93°30'26''$.
4. $24°32'45'' + 35°21'42'' + 15°45'38''$. R. $75°40'5''$.
5. 15 d 21 h 57 m + 18 d 19 h 53 m + 12 d 18 h 51 m. R. 47 d 12 h 41 m.
6. 21 d 12 h 52 m + 16 d 18 h 48 m + 15 d 21 h 43 m. R. 54 d 5 h 23 m.
7. 12 d 15 h 17 m 14 s + 19 d 17 h 18 m 29 s + 20 h 45 m 32 s. R. 33 d 5 h 21 m 15 s.
8. 15 d + 8 d 9 h + 7 d 20 h 53 m + 10 d 13 h 45 m 53 s. R. 41 d 19 h 38 m 53 s.
9. £ 3 - 15 - 10 + £ 2 - 5 - 11 + £ 5 - 15 - 7 + £ 7 - 0 - 9. R. £ 18 - 18 - 1.
10. £ 5 - 12 - 11 + £ 3 - 7 - 10 + £ 6 - 18 - 5 + £ 2 - 0 - 8. R. £ 17 - 19 - 10.
11. £ 10 - 18 - 3 + £ 9 - 15 - 11 + £ 12 - 13 - 9 + £ 6 - 17 - 5. R. £ 40 - 5 - 4.
12. £ 15 - 13 - 8 + £ 10 - 12 - 9 + £ 18 - 11 - 6 + £ 9 - 15 - 4. R. £ 54 - 13 - 3.
13. 6 yd 2 ft 5 in + 3 yd 1 ft 8 in + 5 yd 2 ft 6 in. R. 16 yd 7 in.
14. 5 yd 1 ft 7 in + 4 yd 2 ft 9 in + 6 yd 1 ft 8 in. R. 17 yd.
15. $32°6'19'' + 28° + 12'59'' + 17' + 12°13'$. R. $72°49'18''$.

16. $19°6'12'' + 28'7'' + 25°47'54'' + 39'18'' + 25''$. R. $46°1'56''$.
17. Um operário recebe £ 1 - 15 - 7 na primeira semana de trabalho; ...... £ 1 - 13 - 8 na segunda; £ 1 - 7 - 9 na terceira; £ 1 - 17 - 11 na quarta; quanto recebeu ao todo? R. £ 6 - 14 - 11.
18. Um comerciante vendeu quatro objetos: o primeiro por £ 0 - 19 - 10; o segundo por £ 1 - 0 - 6; o terceiro por £ 1 - 17 - 11; o quarto por £ 1 - 19 - 10; quanto recebeu ao todo? R. £ 5 - 18 - 1.
19. Qual é a duração do ano, tendo em vista que a primavera dura 89 dias, 17 horas e 35 minutos; o verão 89 dias, 1 hora e 2 minutos; o inverno 93 dias, 14 horas e 13 minutos; o outono 92 dias, 20 horas e 59 minutos? R. 365 d 5 h 49 m.
20. Duas cidades estão situadas sôbre o mesmo meridiano; a latitude da primeira é $18°49'36''$ N e a da segunda é $27°19'32''$ S. Avaliar em graus, minutos e segundos a distância que as separa. R. $46°9'8''$.

327. **Subtração de complexos.** — Seja efetuar a seguinte subtração de números complexos:

$$7\text{ d } 6\text{ h } 15\text{ m} - 5\text{ d } 9\text{ h } 30\text{ m}.$$

Devemos subtrair, das unidades de cada ordem do minuendo, as unidades de mesma ordem do subtraendo.

6	29	75
7 d	6 h	15 m
5 d	9 h	30 m
1 d	20 h	45 m

Ao procurar subtrair os minutos dos números dados, notamos que de 15 não se pode subtrair 30. Tomamos, então, 1 hora do minuendo, ou sejam 60 minutos, para juntar aos 15 nêle contidos. — Obtemos, assim,

$$60\text{ m} + 15\text{ m} - 30\text{ m} = 75\text{ m} - 30\text{ m} = 45\text{ m}.$$

Notemos que das 6 horas do minuendo, depois de ter sido tirada uma para a subtração parcial já efetuada, restam apenas 5. E, como de 5 não é possível subtrair 9, tomamos 1 dia do minuendo, ou sejam 24 horas, para somar às 5 nêle contidas. — Temos, assim,

$$24\text{ h} + 5\text{ h} - 9\text{ h} = 29\text{ h} - 9\text{ h} = 20\text{ h}.$$

Finalmente, subtraindo os dias contidos nos números propostos, vem

$$6\text{ d} - 5\text{ d} = 1\text{ d}.$$

Temos, portanto,

$$7\text{ d } 6\text{ h } 15\text{ m} - 5\text{ d } 9\text{ h } 30\text{ m} = 1\text{ d } 20\text{ h } 45\text{ m}.$$

Consideremos, ainda, os exemplos seguintes:

5 26 22	4 3 20	89 59 60
£ 6 - 7 - 10	5 yd 1 ft 8 in	90°
£ 4 - 18 - 11	3 yd 2 ft 10 in	15°32′47″
£ 1 - 8 - 11	1 yd 1 ft 10 in	74°27′13″.

328. Exercícios.

Efetuar as operações seguintes:

1. 90° — 37°26′30″. R. 52°33′30″.
2. 180° — 67°48′35″. R. 112°11′25″.
3. 32°6′ — 18°14′25″. R. 13°51′35″.
4. 29°12′6″ — 22°15′9″. R. 6°56′57″.
5. 28°15′8″ — 23°18′13″. R. 4°56′55″.
6. £ 8 - 0 - 9 — £ 5 - 12 - 10. R. £ 2 - 7 - 11.
7. £ 10 - 1 - 5 — £ 8 - 11 - 6. R. £ 1 - 9 - 11.
8. £ 25 - 10 - 6 — £ 17 - 15 - 9. R. £ 7 - 14 - 9.
9. 15 d — 6 d 4 h 12 m 33 s. R. 8 d 19 h 47 m 27 s.
10. 21 d 7 h — 18 d 15 h 6 m 39 s. R. 2 d 15 h 53 m 21 s.
11. 23 d 12 h 5 m — 20 d 15 h 53 m 18 s. R. 2 d 20 h 11 m 42 s.
12. 25 d 7 h 4 m 33 s — 21 d 9 h 12 m 34 s. R. 3 d 21 h 51 m 59 s.
13. 10 yd 1 ft 9 in — 8 yd 2 ft 10 in. R. 1 yd 1 ft 11 in.
14. 15 yd 2 ft 10 in — 12 yd 2 ft 11 in. R. 2 yd 2 ft 11 in.
15. Uma pessoa possuía £ 12 - 5 - 6. Depois de haver gasto £ 5 - 17 - 10, quanto lhe restou? R. £ 6 - 7 - 8.
16. Uma pessoa depositou em um Banco £ 120 - 10 - 6. Depois de haver retirado £ 35 - 15 - 10, com quanto ficou em depósito no Banco? R. £ 84 - 14 - 8.
17. Sabendo-se que o *complemento* de um ângulo é o que falta a êsse ângulo para atingir 90°, calcular o complemento do ângulo de 25°17′45″. R. 64°42′15″.
18. Sabendo-se que o *suplemento* de um ângulo é o que falta a êsse ângulo para atingir 180°, calcular o suplemento do ângulo de 105°48′52″. R. 74°11′8″.

19. Avaliar, em horas, minutos e segundos, o excesso da duração de um ano bissexto sôbre o trópico, que é, aproximadamente, de 365 d 5 h 48 m 47 s. R. 18 h 11 m 13 s.
20. As latitudes austrais de duas cidades situadas no mesmo meridiano são 48°17′32″ e 19°35′18″, respectivamente. Avaliar, em graus, minutos e segundos a distância que as separa. R. 28°42′14″.

329. Multiplicação de complexos. — Os casos que se podem apresentar são os seguintes:

1.° — o *multiplicando é número complexo e o multiplicador é incomplexo;*

2.° — o *multiplicando e o multiplicador são números complexos.*

330. 1.° caso. — Consideremos o problema seguinte:

Calcular o arco 7 vêzes maior que 15°32′24″.

Evidentemente, a solução do problema proposto será obtida pelo produto de 15°32′24″ por 7.

Para efetuá-lo, bastará multiplicar pelo multiplicador cada uma das unidades de que se compõe o multiplicando. Encontramos, assim,

$$\boxed{\begin{array}{r} 15°32'24'' \\ 7 \\ \hline 105°224'168'' \\ \hline 108°\ 46'\ 48'' \end{array}}$$

$$24'' \times 7 = 168''.$$

Mas, tendo em vista que

$$168'' = 120'' + 48'' = 2' + 48'',$$

escrevemos apenas 48″ e retemos 2′ para reuni-los ao produto parcial seguinte. — Resulta, portanto,

$$32' \times 7 + 2' = 224' + 2' = 226'.$$

Mas, por ser

$$226' = 180' + 46' = 3° + 46',$$

escrevemos no resultado 46′ e retemos 3° para reuni-los ao produto parcial subseqüente. — Obtemos, assim,

$$15° \times 7 + 3° = 105° + 3° = 108°.$$

Em resumo, temos

$$15°32'24'' \times 7 = 108°46'48''.$$

Mas também se pode resolver o problema dado, reduzindo o número complexo à forma incomplexa, para depois efetuar a operação. — Encontraremos, assim,

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times\, 60 \\ \hline 900 \\ +\, 32 \\ \hline 932 \\ \times\, 60 \\ \hline 55\,920 \\ +\, 24 \\ \hline 55\,944 \end{array}$$

ou, efetuando a multiplicação,

$$55\,944'' \times 7 = 391\,608''.$$

Reduzamos o resultado obtido a complexo.

$$\begin{array}{r|l} 391608 & 60 \\ \cline{2-2} 316 & 6526 \;|\; 60 \\ 160 & \;\;526 \;\;\; 108 \\ 408 & \;\;\;\;46 \\ 48 & \end{array}$$

Resulta, portanto,

$$15°32'24'' \times 7 = 108°46'48''.$$

331. 2.º caso. — Consideremos o problema seguinte: *Calcular o gasto com o consumo de energia elétrica em uma fábrica durante 6 d 5 h 30 m de trabalho ininterrupto, sabendo-se que o gasto por hora é £ 1 - 5 - 8.*

O problema proposto conduz-nos à seguinte multiplicação:

$$(£\ 1 - 5 - 8) \times (6\text{ d } 5\text{ h } 30\text{ m}).$$

Como o gasto é referido à hora, reduzamos o intervalo de tempo a horas:

$$6\text{ d } 5\text{ h } 30\text{ m} = \frac{8\,970}{60}\text{ h} = \frac{299}{2}\text{ h}.$$

Convertamos, agora, em dinheiros a importância gasta por hora:

$$£\ 1 - 5 - 8 = 308\text{ d}.$$

Multiplicando os números incomplexos obtidos, encontramos

$$308 \times \frac{299}{2} = \frac{92\,092}{2} = 46\,046\text{ d}.$$

Finalmente, exprimindo o resultado obtido em libras, xelins e dinheiros, vem

$$46\,046\text{ d} = £\ 191 - 17 - 2.$$

Temos, portanto,

$$(£\ 1 - 5 - 8) \times (6\text{ d } 5\text{ h } 30\text{ m}) = £\ 191 - 17 - 2.$$

332. **Exercícios.**

1. **Multiplicar £ 18 - 3 - 4 por 7.** R. £ 127 - 3 - 4.
2. **Formar o produto de £ 21 - 12 - 9 por 8.** R. £ 173 - 2 - 0.
3. **Calcular o triplo de £ 32 - 15 - 6.** R. £ 98 - 6 - 6.
4. **Qual é o produto de 15°25'42" por 9?** R. 138°51'18".
5. **Calcular o produto de 24°32'45" por 12.** R. 294°33'.
6. **Multiplicar 85°47'53" por 15.** R. 1 286°58'15".
7. **Formar o produto de 16 h 48 m 17 s por 6.** R. 100 h 49 m 42 s.
8. **Qual é o produto de 7 d 6 h 18 m 43 s por 23?** R. 167 d 1 h 10 m 29 s.
9. **Calcular o triplo de 6 yd 2 ft 11 in.** R. 20 yd 2 ft 9 in.
10. **Multiplicar 12 yd 1 ft 9 in por 7.** R. 88 yd 3 in.
11. **Calcular o produto de 15 yd 2 ft 7 in por 12.** R. 190 yd 1 ft.
12. **Quanto custam 19 quilogramas de uma mercadoria, cujo preço de quilograma é £ 1 - 6 - 7?** R. £ 25 - 5 - 1.
13. **Um ângulo é 6 vêzes maior que outro; o primeiro tem 27°18'36"; quanto mede o segundo?** R. 163°51'36".
14. **Para efetuar uma revolução sideral, o planêta Vênus demora 224 d 16 h 49 m 9 s, aproximadamente; em que tempo efetuará 5 revoluções?** R. 1 123 d 12 h 5 m 45 s.
15. **A Lua demora, aproximadamente 27 d 7 h 43 m 11 s para percorrer a sua trajetória em tôrno da Terra; em que tempo executará 6 revoluções completas?** R. 163 d 22 h 19 m 6 s.
16. **Um móvel percorreu 15 yd 1 ft 9 in em 1 minuto; que distância percorrerá em 1 hora?** R. 935 yd.

17. Um móvel percorreu 6 yd 1 ft 9 in em 1 minuto; que distância percorrerá em 3 h 18 m? R. 1 303 yd 1 ft 6 in.

18. Um móvel percorreu $8^\circ 15' 20''$ de certa circunferência em 1 minuto. Quanto percorrerá em 2 h 25 m 30 s? R. $1\,201^\circ 11'$.

19. Uma pessoa ganha £ 5 - 17 - 11 por mês; em quanto importa o seu salário de 1 a 6 m 12 d? (consideram-se meses de 30 dias). R. £ 108 - 9 - 8.

20. O gasto com o consumo de energia elétrica em uma fábrica é de £ 1 - 12 - 8 por dia; calcular o gasto em 8 d 5 h 30 m de trabalho. R. £ 13 - 8 - $9\frac{5}{6}$.

333. **Divisão.** — Consideremos os casos seguintes:

1.º *o dividendo é complexo e o divisor incomplexo;*

2.º *o dividendo é incomplexo e o divisor é complexo;*

3.º *o dividendo e o divisor são complexos.*

334. **1.º caso.** — Consideremos o problema seguinte: *Calcular o preço de 1 quilograma de certa mercadoria, sabendo-se que 8 quilogramas custam £ 19 - 8 - 7.*

Evidentemente, o problema conduz-nos à divisão de £ 19 - 8 - 7 por 8.

£ 19 - 8 - 7	8
3	£ 2 - 8 - $6\frac{7}{8}$
× 20	
60	
+ 8	
68	
4	
× 12	
48	
+ 7	
55	
7	

Iniciando a divisão das unidades de cada ordem do dividendo pelo divisor a partir das mais altas, ou seja,

$$£\,19 : 8,$$

encontramos o quociente 2 e o resto 3, ambos expressos em libras.

Convertendo o resto em xelins, temos

$$£\,3 = 3 \times 20 = 60 \text{ s}.$$

Reunindo, aos 60 s provenientes do primeiro resto, os 8 s contidos no dividendo, resulta

$$60 \text{ s} + 8 \text{ s} = 68 \text{ s}.$$

Dividindo o novo dividendo parcial pelo divisor, ou seja,

$$68 \text{ s} : 8,$$

obtemos o quociente 8 e o resto 4, ambos expressos em xelins. — Convertendo o resto em dinheiros, vem

$$4 \text{ s} = 4 \times 12 = 48 \text{ d}.$$

Somando, aos 48 d provenientes do segundo resto, os 7 d contidos no dividendo, encontramos

$$48 \text{ d} + 7 \text{ d} = 55 \text{ d}.$$

Finalmente, dividindo êsse novo dividendo pelo divisor, ou seja,

$$55 \text{ d} : 8,$$

encontramos o quociente 6 e o resto 7, ambos expressos em dinheiros. — Segue-se, assim, que

$$\frac{£\,19 - 8 - 7}{8} = £\,2 - 8 - 6\frac{7}{8}.$$

335. **2.º caso.** — Consideremos o problema seguinte: *um móvel percorreu 43º de certa circunferência em 5 h 7 m 30 s. Qual foi o seu percurso em uma hora?*

O problema proposto conduz-nos à seguinte divisão:

$$43^\circ : (5 \text{ h } 7 \text{ m } 30 \text{ s}).$$

Convertendo o número complexo em fração de hora, encontramos

$$5 \text{ h } 7 \text{ m } 30 \text{ s} = \frac{18\,450}{3\,600} \text{ h} = \frac{41}{8} \text{ h}.$$

Dividamos 43° pela fração acima obtida:

$$43^\circ : \frac{41}{8} = \frac{43 \times 8}{41} = \frac{344}{41}.$$

Efetuando a divisão indicada, vem

$$8^\circ 23' 24'' \frac{36}{41}.$$

Temos, portanto,

$$43^\circ : (5\ \text{h}\ 7\ \text{m}\ 30\ \text{s}) = 8^\circ 23' 24'' \frac{36}{41}.$$

336. 3.° caso. — Consideremos o problema seguinte: *calcular o salário por dia de um operário, sabendo-se que, em 5 d 6 h 30 m de serviço recebeu £ 1 - 17 - 11.*

O proplema proposto conduz-nos à seguinte divisão:

$$(£\ 1 - 17 - 11) : (5\ \text{d}\ 6\ \text{h}\ 30\ \text{m}).$$

Convertamos £ 1 - 17 - 11 em fração de libra:

$$£\ 1 - 17 - 11 = \frac{455}{240} = \frac{91}{48}\ £.$$

Transformemos 5 d 6 h 30 m em fração de dia:

$$5\ \text{d}\ 6\ \text{h}\ 30\ \text{m} = \frac{7\,590}{1\,440} = \frac{253}{48}\ \text{d}.$$

Dividindo a primeira fração pela segunda, vem

$$\frac{91}{48} : \frac{253}{48} = \frac{91 \times 48}{48 \times 253} = \frac{91}{253}\ £.$$

Transformando em complexo o resultado obtido, encontramos

$$\frac{91}{253}\ £ = £\ 0 - 7 - 2\frac{82}{253}.$$

Temos, portanto,

$$(£\ 1 - 17 - 11) : (5\ \text{d}\ 6\ \text{h}\ 30\ \text{m}) = £\ 0 - 7 - 2\frac{82}{253}.$$

337. **Exercícios.**

1. Dividir £ 12 - 6 - 9 por 5. R. £ 2 - 9 - 4 $\frac{1}{5}$.
2. Dividir £ 23 - 12 - 10 por 6. R. £ 3 - 18 - 9 $\frac{2}{3}$.
3. Dividir 48°35′20″ por 8. R. 6°4′25″.
4. Dividir 121°12′42″ por 9. R. 13°28′4″ $\frac{2}{3}$.
5. Dividir 13°7′19″ por 35. R. 22′29″ $\frac{24}{35}$.
6. Dividir 7 d 8 h 4 m por 3. R. 2 d 10 h 41 m $\frac{1}{3}$.
7. Dividir 6 d 12 h 17 m 5 s por 25. R. 6 h 15 m 5 s.
8. Dividir 12 yd 1 ft 4 in por 8. R. 1 yd 1 ft 8 in.
9. Dividir 57 yd 1 ft 6 in por 15. R. 3 yd 2 ft 6 in.
10. Qual é o quociente de £ 10 - 12 - 6 por $\frac{2}{3}$? R. £ 15 - 18 - 9.
11. Qual é o quociente de 49°36′18″ por $\frac{3}{4}$? R. 66°8′24″.
12. Qual é o quociente de 120°20′30″ por $\frac{5}{6}$? R. 144°24′36″.
13. Qual é o quociente de 8 d 12 h 10 m por $\frac{7}{8}$? R. 9 d 17 h 20 m.
14. Qual é o quociente de 15 yd 2 ft 1 in por $\frac{5}{8}$? R. 25 yd 4 in.
15. Sabendo-se que o *ângulo reto* tem por medida 90°, calcular o ângulo que corresponde a $\frac{1}{8}$ do reto. R. 11°15′.
16. Com £ 4 - 4 - 6 quantos metros de certo tecido se podem comprar, se cada metro custa £ 0 - 6 - 6? R. 13 m.
17. Quanto ganha por mês um operário, que, por 1 a 6 m 12 d de trabalho, recebeu £ 108 - 9 - 8? R. £ 5 - 17 - 11.
18. Calcular o salário semanal de um operário, sabendo-se que, por 3 sm 4 d 5 h de trabalho, recebeu £ 4 - 5 - 7. R. £ 1 - 3 - 9 $\frac{111}{605}$.
19. Achar o quociente de £ 11 - 7 - 6 por £ 2 - 7 - 6. R. 4 $\frac{15}{19}$.
20. Uma roda girou 1 200°19′14″ em 2 h 3 m 4 s. Quanto girou em 1 hora? R. 585°12′18″ $\frac{126}{923}$.

CAPÍTULO XX

UNIDADE DE VELOCIDADE. VELOCIDADE ANGULAR.

338. **Movimento uniforme.** — Diz-se que um móvel está animado de *movimento uniforme* quando percorre espaços iguais em tempos iguais.

Assim, se um automóvel demorar exatamente um minuto para percorrer cada quilômetro de certa estrada, o seu movimento será *uniforme*.

Nesse movimento, chama-se *velocidade* o espaço percorrido na unidade de tempo.

No exemplo considerado a velocidade do móvel foi de 1 quilômetro por minuto ou de 60 quilômetros por hora.

339. **Unidade legal de velocidade.** — A unidade legal de velocidade é o metro por segundo, cujo símbolo é *m/s*.

O metro por segundo é a velocidade de um móvel que, animado de movimento retilíneo e uniforme, percorre a distância de um metro durante um segundo.

Os submúltiplos do metro por segundo são os seguintes:

Nome	*Símbolo*	*Valor*
metro por segundo	m/s	1 m/s
metro por minuto	m/min	$\frac{1}{60}$ m/s
centímetro por segundo	cm/s	$\frac{1}{100}$ m/s
quilômetro por hora	km/h	$\frac{1}{3,6}$ m/s
nó	—	0,514 78 m/s

O *nó* é utilizado para a medida da velocidade das embarcações correspondendo a uma milha marítima internacional por hora:

$$1 \text{ nó} = 1 \text{ M/h}.$$

Se substituirmos o metro por qualquer unidade de comprimento e o segundo por qualquer unidade de tempo, poderemos obter outras unidades de velocidade. — Exemplo: o *quilômetro por minuto*, cujo símbolo é *km/min*.

340. **Mudança de unidade.** — As mudanças de unidade se fazem de acôrdo com as correspondências estabelecidas no quadro anterior.

Consideremos alguns exemplos.

1.º *A quantos metros por segundo corresponde a velocidade de 240 metros por minuto?*

Temos

$$1 \text{ m/min} = \frac{1}{60} \text{ m/s}.$$

Portanto:

$$240 \text{ m/min} = 240 \times \frac{1}{60} \text{ m/s} = 4 \text{ m/s}.$$

2.º *Exprimir em metros por segundo a velocidade de 10,8 quilômetros por hora.*

Temos

$$1 \text{ km/h} = \frac{1}{3,6} \text{ m/s}.$$

Portanto:

$$10,8 \text{ km/h} = 10,8 \times \frac{1}{3,6} \text{ m/s} = 3 \text{ m/s}.$$

3.º *Referir ao metro por segundo a velocidade de 20 nós.*

Temos

$$1 \text{ nó} = 0,514\,78 \text{ m/s}.$$

Portanto:

$$20 \text{ nós} = 20 \times 0,514\,78 \text{ m/s} = 10,295\,6 \text{ m/s}.$$

4.º *Exprimir em metros por minuto a velocidade de 5 metros por segundo.*

Temos

$$1 \text{ m/s} = 60 \text{ m/min}.$$

Portanto:

$$5 \text{ m/s} = 5 \times 60 \text{ m/min} = 300 \text{ m/min}.$$

5.º *Referir ao quilômetro por hora a velocidade de 12 metros por segundo.*

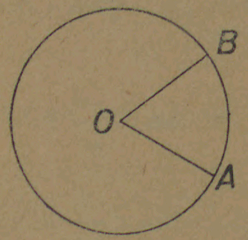
Temos

$$1 \text{ m/s} = 3{,}6 \text{ km/h}.$$

Portanto:

$$12 \text{ m/s} = 12 \times 3{,}6 \text{ km/h} = 43{,}2 \text{ km/h}.$$

341. O radiano. — Na circunferência vista abaixo tracemos os raios OA e OB. Forma-se dêsse modo, o ângulo AOB, denominado *ângulo central.*



Se o comprimento do arco AB fôr igual ao comprimento do raio OA diremos que o ângulo central AOB tem por medida um radiano.

Dá-se a denominação de *radiano* ao ângulo central que intercepta um arco de círculo cujo comprimento é igual ao comprimento do raio do mesmo círculo.

O *radiano* é a terceira unidade legal do ângulo. Representa-se com o símbolo *rd.*

Sendo o comprimento da circunferência igual ao produto

$$2 \times \pi \times R,$$

em que $\pi = 3{,}14$ e R representa o raio do círculo, segue-se que a circunferência tem

$$2 \times \pi \text{ radianos}.$$

Por outro lado, notando que a circunferência tem 360 graus ou 400 grados, segue-se que

$$2 \times \pi \text{ radianos} = 360 \text{ graus} = 400 \text{ grados}.$$